

**Современный
Гуманитарный
Университет**

Дистанционное образование

0619.01.01;1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

ФИЗИКА

ЮНИТА 1

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

МОСКВА 2001

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

КУРС: ФИЗИКА

- Юнита 1. Физические основы механики.
- Юнита 2. Статистическая физика и термодинамика.
- Юнита 3. Электричество.
- Юнита 4. Волновые процессы и колебания.
- Юнита 5. Строение вещества.

Юнита 1

Рассматриваются основные законы механики.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета

Юнита соответствует профессиональной образовательной программе №1

0619.004.01.99.01; 1/12.13.Тир.4000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН	стр. 5
ЛИТЕРАТУРА	6
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ	7
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР	8
Введение	
Предмет физики. Физические измерения	8
1. Кинематика материальной точки	9
1.1. Пространственно-временные системы отсчета	9
1.2. Материальная точка. Геометрические характеристики движения	10
1.3. Скорость	11
1.4. Ускорение	12
1.5. Движение по окружности	15
2. Динамика материальной точки	16
2.1. Сила и масса	16
2.2. Инерциальные системы отсчета	16
2.3. Второй закон Ньютона	17
2.4. Третий закон Ньютона	18
3. Силы в природе	18
3.1. Сила тяготения	19
3.2. Сила трения	20
3.3. Упругие силы	22
3.4. Закон сохранения импульса	22
4. Работа и энергия. Закон сохранения энергии	25
4.1. Работа силы	25
4.2. Кинетическая энергия	27
4.3. Поле сил. Потенциальная энергия	28
4.4. Закон сохранения и превращения энергии	29
4.5. Центральное соударение двух тел	30
5. Вращательное движение твердого тела	31
5.1. Понятие об абсолютно твердом теле. Центр масс	31
5.2. Движение твердого тела	33
5.3. Момент силы	33
5.4. Момент инерции. Теорема Штейнера	35
5.5. Основное уравнение вращательного движения	37
6. Законы сохранения при вращательном движении	38
6.1. Момент импульса	38
6.2. Закон сохранения момента импульса	40
6.3. Кинетическая энергия вращающегося тела	41
6.4. Работа внешних сил при вращении твердого тела	41
6.5. Энергия сложного движения	42
7. Гармонические колебания	43
7.1. Колебательное движение	43
7.2. Гармонические колебания	43
7.3. Физический и математический маятники	45

7.4. Энергия колебательного движения	46
8. Неинерциальные системы отсчета	47
8.1. Силы инерции	47
8.2. Силы инерции при ускоренном поступательном движении систем отсчета	48
8.3. Силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета	49
8.4. Силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета	50
9. Основы релятивистской механики	52
9.1. Преобразования Галилея. Принципы относительности Галилея и Эйнштейна	52
9.2. Преобразования Лоренца	56
9.3. Одновременность событий в разных системах отсчета	58
9.4. Длительность событий в разных системах отсчета	58
9.5. Длина тел в разных системах отсчета	60
9.6. Релятивистский закон сложения скоростей	61
9.7. Интервал между событиями	62
9.8. Основной закон релятивистской динамики материальной точки	63
9.9. Закон взаимосвязи массы и энергии	65
10. Элементы механики жидкостей	67
10.1. Давление в жидкости и газе	67
10.2. Уравнение неразрывности	68
10.3. Уравнение Бернулли	69
10.4. Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей	72
10.5. Движение тел в жидкостях и газах	73
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	75
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ	76
ГЛОССАРИЙ*	

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Предмет механики. Классическая механика и пределы ее применимости. Понятие состояния в классической механике.

Кинематика материальной точки. Координаты, траектория, радиус-вектор. Скорость и ускорение. Угловая скорость и угловое ускорение. Нормальное и тангенциальное ускорение.

Уравнения движения. Законы Ньютона. Силы трения, тяготения и упругости. Импульс. Закон сохранения импульса. Центр инерции. Движение центра инерции.

Работа и энергия. Кинетическая энергия. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии.

Момент силы. Момент импульса. Момент инерции. Закон сохранения момента импульса.

Кинематика и динамика твердого тела. Основное уравнение динамики вращательного движения. Кинетическая энергия и момент импульса вращающегося твердого тела.

Неинерциальные системы отсчета. Движение в неинерциальных системах отсчета. Силы инерции. Центробежная сила инерции и сила Кориолиса.

Основы релятивистской механики. Принципы относительности Галилея и Эйнштейна. Преобразования Лоренца. Релятивистская динамика. Связь массы и энергии.

Кинематика и динамика жидкостей и газов. Линии тока. Уравнение Бернулли. Внутреннее трение. Ламинарное и турбулентное движение. Движение твердого тела в вязкой среде.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

1. Трофимова Т. И. Курс физики. М., 1990.
2. Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике. М., 1990.

Дополнительная

3. Савельев Н. В. Курс физики. М., 1989. Т. 1. Механика. Молекулярная физика.
4. Зисман Г. А., Тодес О. М. Курс общей физики, Киев, 1994. Т.1.
5. Фейнман. Р. Фейнмановские лекции по физике, М. 1966. Т.1-2.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М., 1974.
7. Киттель Ч., Найт В., Рудерман М. Берклеевский курс физики, М., 1983. Т.1. Механика.
8. Савельев И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике. М., 1982.
9. Стрелков С. П., Эльцин И. А., Яковлев И. А. Сборник задач по общему курсу физики. М., 1964. Ч.1.
10. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики. М., 1979.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№	Умения	Алгоритмы
1.	Расчет кинематических характеристик материальной точки при равноускоренном прямолинейном движении.	1. Выбрать тело отсчета и связать с ним ось координат. 2. Записать уравнение движения материальной точки. 3. Найти неизвестные кинематические характеристики материальной точки.
2.	Расчет кинематических характеристик материальной точки при криволинейном движении.	1. Записать уравнение движения материальной точки. 2. Рассчитать ускорение (a) и скорость (v) материальной точки при криволинейном движении.
3.	Расчет движения тела при действии на него нескольких сил.	1. Выполнить рисунок и указать направление сил, действующих на тела. 2. Записать уравнение движения для каждого из тел. 3. Вычислить неизвестные параметры.
4.	Применение законов сохранения импульса и энергии для расчета характеристик механической системы.	1. Выполнить рисунок с указанием начального и конечного положения тела. 2. Записать законы сохранения импульса и энергии. 3. Произвести расчет неизвестных величин.
5.	Расчет механической работы и мощности.	1. Рассчитать механическую работу (A). 2. Рассчитать мощность (N).
6.	Расчет параметров твердого тела при вращательном движении.	1. Записать уравнение движения для вращающегося тела. 2. Рассчитать неизвестные параметры.
7.	Применение законов релятивистской механики для расчета механических характеристик тела.	1. Записать выражения для промежутков времени, длины, массы и других величин в релятивистской механике. 2. Произвести расчет неизвестных величин относительно подвижной или неподвижной системы отсчета.

ВВЕДЕНИЕ

Предмет физики. Физические измерения

Окружающий нас мир представляет собой совокупность материальных объектов, находящихся в постоянном взаимодействии и непрерывном движении. Предмет физики связан с выяснением законов движения и взаимодействия материальных объектов, причем в самом общем виде.

Как известно, критерием истины служит практика, в нашем случае - эксперимент. Поэтому анализ новых экспериментальных данных приводит со временем к выявлению новых законов и представлений, которым уступают место старые. При этом нужно иметь в виду, что новые законы не приводят к полному отрицанию старых. Они, как правило, лишь развивают и обобщают их, хотя в некоторых случаях изменения бывают кардинальными.

Говоря о важности физического эксперимента, нельзя не упомянуть о том, что при проведении опытов возникают вопросы о способе и точности измерений тех или иных величин. Некоторые величины поддаются прямому измерению. В этих случаях измерение представляет собой сравнение измеряемой величины с эталоном. Существуют эталоны времени, длины, массы и т. д. В процессе сравнения неизбежно возникновение некоторых погрешностей. Величина погрешности, которую мы признаем удовлетворительной при данных измерениях, зависит от практических потребностей.

В процессе измерений возникает также вопрос нужно ли вводить для каждой измеряемой величины эталон, то есть нужен ли эталон скорости, ускорения, силы и т. д. Оказывается достаточно ввести эталоны для нескольких основных физических величин. Единицы измерения остальных можно установить на основании физических законов, связывающих между собой эти физические величины и те, для которых эталоны существуют. Например, определяя среднюю скорость движения $V_{\text{ср.}}$ как отношение пути S ко времени t , за которое пройден этот путь - $V_{\text{ср.}} = S/t$, можно найти единицу измерения скорости. Если путь измеряется в метрах (это записывается в виде: $[S] = \text{м}$, что означает, что размерность пути - метры, время в секундах $[t] = \text{с}$), то единицей измерения скорости будет $[V] = [S]/[t]$ м/с. Система измерений физических величин с помощью некоторого (минимального) количества основных (эталонных) единиц измерения называется системой единиц.

В механике наиболее употребимы системы единиц, в основу которых положены единицы измерения длины, массы и времени. В технических науках наибольшее удобство представляет Международная система единиц СИ, в которой эталоном длины является метр (м), массы - килограмм (кг) и времени - секунда (с). Проводя какие-либо расчеты, необходимо, чтобы все используемые при этом величины имели размерности, соответствующие одной выбранной системе единиц. Тогда и результат вычислений будет иметь размерность, отвечающую данной системе единиц.

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. Пространственно-временные системы отсчета

Механика изучает процессы движения тел, при которых изменяется их взаимное положение, и причины, вызывающие это движение. Механическое движение - это изменение с течением времени положения тел или их частей в пространстве относительно друг друга.

Развитие механики как науки начинается с III в. до н.э., когда древнегреческий ученый Архимед (287 - 212 до н.э.) сформулировал закон равновесия рычага и законы равновесия плавающих тел. Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Г. Галилеем (1564-1642) и окончательно сформулированы английским ученым И. Ньютоном (1643-1727).

Механика Галилея - Ньютона называется **классической механикой**. В ней изучаются законы движения макроскопических тел, скорости движения которых малы по сравнению со скоростью движения света в вакууме. Законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме, изучаются **релятивистской механикой**, основанной на специальной теории относительности, сформулированной А. Эйнштейном (1879-1955). Для описания движения микроскопических тел (отдельные атомы и элементарные частицы) законы классической механики неприменимы - они заменяются законами **квантовой механики**.

В первой части нашего курса мы будем иметь дело с механикой Галилея - Ньютона, т. е. будем рассматривать движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими скорости света в вакууме. В классической механике общепринята концепция абсолютного пространства и абсолютного времени, не зависящих от свойств материи, разработанная И. Ньютоном и господствовавшая в естествознании на протяжении XVII - XIX вв. Механика Галилея - Ньютона рассматривает пространство и время как объективные формы существования материи, но в отрыве друг от друга и от движения материальных тел, что соответствовало уровню знаний того времени. Так как механическое описание некоторых физических явлений наглядно и привычно и с его помощью можно объяснить многие физические явления, в XIX в. некоторые физики стали сводить все явления к механическим. Эта точка зрения соответствовала философскому механистическому материализму. Дальнейшее развитие физики показало, что многие физические явления не могут быть сведены к простейшему виду движения - механическому. Механистический материализм уступил место материализму диалектическому.

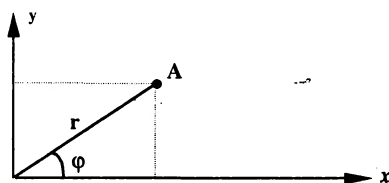
Механика состоит из трех разделов: кинематика, динамика, статика.

Кинематика изучает механическое движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обуславливают. При этом состояние покоя можно рассматривать как частный случай движения (движение с нулевой скоростью).

Механическое движение предполагает изменение положения тела в пространстве с течением времени. Положение тела определяется относительно некоторого произвольно выбранного тела, называемого **телом отсчета**. С ним связывается **система отсчета** - совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета. При выборе системы отсчета важно, чтобы при переходе от одной

системы отсчета к другой законы классической механики не изменялись.

Для количественного описания движения в заданной системе отсчета необходимо выработать метод определения положения точки в пространстве. Для этого служит система координат. Выбор системы координат диктуется соображениями удобства при решении тех или иных задач. Например, положение точки на плоскости однозначно определяется парой чисел, а в пространстве - тремя числами. На плоскости чаще всего используется прямоугольная декартова система координат, в которой положение точки А задается числами x и y , называемыми декартовыми координатами этой точки. При решении задач, связанных с движением по окружности, более удобны полярные координаты: r и φ - полярные координаты точки А (рис. 1.1.) Связь между этими парами чисел очевидна:



$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi\end{aligned}\quad (1.1)$$

Рис. 1.1

Характер движения в заданной системе отсчета не зависит от выбора системы координат. При переходе от одной системы координат к другой происходит лишь замена одного набора координат на другой. Например, при переходе от полярных к декартовым координатам они преобразуются по закону (1.1), что изменяет только математический вид зависимости от времени координат, описывающих движение.

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется числом степеней свободы. Если материальная точка свободно движется в пространстве, то она обладает тремя степенями свободы (координаты x , y и z), если она движется по некоторой поверхности, то - двумя степенями свободы, если вдоль некоторой линии, то — одной степенью свободы.

Масштаб измерения времени выбирается с помощью некоторого регулярно повторяющегося (периодического) процесса. Самым естественным из таких процессов является периодическая смена дня и ночи, происходящая каждые сутки. За единицу измерения времени принята $1/86400$ часть суток - секунда.

1.2. Материальная точка.

Геометрические характеристики движения

Рассматривая движение различных реальных тел, на первых порах важно обнаружить некоторые общие характеристики их движения, не зависящие от конкретных особенностей каждого из этих тел. Это достигается путем замены реального тела материальной точкой, то есть объектом, обладающим массой данного тела, но не имеющим геометрических размеров. Материальной точкой называется тело, размерами которого можно пренебречь.

Множество точек пространства, через которые прошла материальная точка в процессе движения, образуют линию, называемую траекторией движения.

Путь представляет собой полное расстояние, пройденное материальной

точкой при движении вдоль траектории. Путь - скалярная величина, то есть число, причем положительное, которое в процессе движения может только увеличиваться.

Перемещением точки за некоторый промежуток времени называется вектор, соединяющий начальное и конечное положения точки в пространстве. На рис. 1.2 путь представляет собой длину кривой, вдоль которой двигалось тело от точки О до точки А или до точки В, а соответствующие перемещения представлены в виде векторов ОА и ОВ. Перемещение между точками А и В можно представить в виде вектора АВ, который равен разности векторов ОВ и ОА.

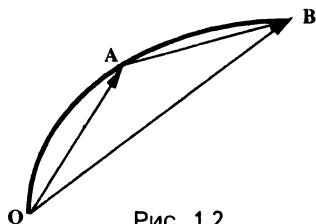


Рис. 1.2

Обозначим векторы перемещения следующим образом: $\vec{OA} = \vec{r}_1$, $\vec{OB} = \vec{r}_2$. Тогда можно

записать, что $\vec{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta \vec{r}$. Как видно из рис. 1.2 абсолютная величина вектора перемещения равна длине хорды, стягивающей две точки траектории. При сближении точек А и В

величина $|\Delta \vec{r}|$ будет уменьшаться так, что длина хорды будет приближаться к длине дуги траектории, равной пути, пройденному телом между точками А и В. В пределе бесконечно малого перемещения, когда расстояние между точками А и В становится бесконечно малым, можно заключить, что

$$dS = |dr|, \quad (1.2)$$

где $|dr|$ - модуль элементарного перемещения $d\vec{r}$ между двумя бесконечно близкими точками траектории, dS - путь, пройденный телом между этими точками.

1.3. Скорость

Пусть перемещение $\Delta \vec{r}$ между точками А и В совершено за время Δt .

Средней скоростью на участке траектории АВ называется векторная величина,

равная отношению $\Delta \vec{r}$ к Δt :

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$V_{cp} = \frac{s}{t} \quad |)$$

(1.3)

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением вектора

$\Delta \vec{r}$, то есть $\vec{V}_{cp}$ направлен вдоль хорды, стягивающей две точки траектории.

Часто вводится понятие **среднепутевой скорости** в виде:

среднепут. скор.

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad (1.4)$$

где S - путь, проходимый точкой за время Δt . Среднепутевая скорость является скалярной величиной.

Уменьшая интервал времени Δt , можно перейти от средней к мгновенной скорости $\vec{V}$. Мгновенная скорость определяется как предел средней скорости при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$V_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (1.5)$$

то есть мгновенная скорость равна производной перемещения по времени. Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в каждой ее точке.

По абсолютной величине мгновенная скорость оказывается равной производной пути по времени.

Действительно, с учетом (1.2):

$$V = \left| \vec{V} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left| \Delta \vec{r} \right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} \quad (1.6)$$

В общем случае при движении тела вдоль траектории его скорость изменяется как по величине, так и по направлению.

В системе СИ скорость измеряется в м/с.

1.4. Ускорение

Среднее ускорение тела определяется как отношение изменения скорости к интервалу времени Δt , за которое это изменение произошло: $\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$. При стремлении Δt к нулю получим ускорение в данной точке траектории:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad (1.7)$$

Таким образом, ускорение есть производная скорости по времени или вторая производная перемещения по времени. При прямолинейном движении векторы скорости и ускорения направлены вдоль одной прямой. В общем случае их направления не совпадают.

При криволинейном движении можно считать, что любой достаточно малый

отрезок траектории представляет собой дугу некоторой окружности. Проведя касательные в двух точках этой дуги и восстановив к ним перпендикуляры, можно найти радиусы этой окружности: пересечение перпендикуляров является центром окружности. Длина дуги $\Delta S = R\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ - угол между ограничивающими эту дугу радиусами. (Напомним, что угол при этом должен измеряться в радианной мере).

При стремлении угла $\Delta\varphi$ к нулю центр указанной окружности называется центром кривизны траектории в данной точке, а радиус:

$$R = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{dS}{d\varphi} \quad (1.8)$$

- радиусом кривизны траектории. Величина, обратная радиусу (1.8), называется кривизной траектории:

$$\rho = \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{dS} \quad (1.9)$$

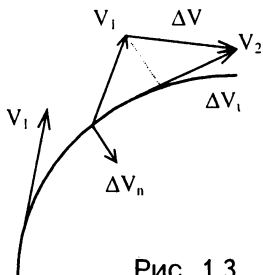


Рис. 1.3

Рассмотрим теперь две достаточно близко лежащие точки траектории А и В, при переходе между которыми скорость точки изменилась от $\vec{V}_1$ до $\vec{V}_2$ (рис. 1.3). Вектор изменения скорости $\Delta\vec{V}$ можно представить в виде суммы двух векторов:

$$\Delta\vec{V} = \Delta\vec{V}_n + \Delta\vec{V}_\tau, \quad (1.10)$$

где $\Delta\vec{V}_\tau$ - проекция $\Delta\vec{V}$ на направление $\vec{V}_1$, то есть на направление касательной в

точке В, а $\Delta\vec{V}_n$ - проекция $\Delta\vec{V}$ на направление, перпендикулярное $\vec{V}_\tau$, то есть вдоль радиуса кривизны траектории в данной точке. Деля почленно соотношение (1.10) на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}_\tau}{\Delta t} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \quad (1.11)$$

где $\vec{a}_\tau$ - **тангенциальное ускорение**, а $\vec{a}_n$ - **нормальное ускорение** движущейся точки. Таким образом, **полное ускорение** точки можно представить как сумму нормального и тангенциального ускорений. При уменьшении угла $\Delta\varphi$, то есть при сближении точек А и В, можно заметить, что:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \text{ координаты - ур-я.}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

кривизна траект. - я.

φ – угол поворота радиус-вектора точки (углов. перемещ.) (рад.)
 ω – углов. скорость (рад./с.).

$$|\vec{V}_\tau| = |\vec{V}_1| \neq |\Delta \vec{V}_\tau|, \quad \frac{|\Delta \vec{V}_n|}{|\vec{V}_1|} = \frac{\Delta S}{R} \quad (1.12)$$

Тогда, согласно первому равенству (1.12), тангенциальное ускорение отвечает

изменению скорости по величине, $a_\tau = \frac{d|\vec{V}|}{dt}$. Нормальное ускорение,

определяющее изменение скорости по направлению и направленное вдоль радиуса кривизны траектории в данной точке, будет равно:

$$|a_n| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{V}_n|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\vec{V}_1|}{\Delta t} \frac{\Delta S}{R} = \frac{|\vec{V}_1|}{R} |\vec{V}| = \frac{V^2}{R}. \quad (1.13)$$

Здесь учтено второе равенство (1.12) и определение скорости (1.6).

Полное ускорение при криволинейном движении имеет величину:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{V^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dt}\right)^2} \quad (1.14)$$

и направлено под углом α к касательной к траектории:

$$\operatorname{tg} \alpha = a_n / a_\tau. \quad (1.15)$$

Из сказанного выше следует, что равенство нулю нормальной составляющей скорости отвечает движению без изменения направления скорости, то есть прямолинейному движению. Если ускорение постоянно ($a = \text{const}$), то скорость материальной точки: $V = \int a dt = a \int dt = at + V_0$, где V_0 - скорость точки в начальный момент времени при $t = 0$ (начальная скорость). В этом случае перемещение

точки $S = \int V dt = V_0 t + \frac{at^2}{2} + S_0$, где S_0 - начальное перемещение. При

равенстве нулю тангенциального ускорения скорость меняется только по направлению. Тогда мы имеем дело с равномерным движением по криволинейной траектории. Если при этом $a = \text{const}$, то из (1.13) следует, что кривизна остается постоянной - это случай равномерного движения по окружности.

Из определения (1.7) следует, что размерность ускорения в системе СИ:

$$[a] = \frac{[V]}{[t]} = \text{м/с}^2.$$

1.5. Движение по окружности

При движении тела по окружности от линейного перемещения Δr можно перейти к угловому $\Delta\phi$ и от линейной скорости V к **угловой** - ω . Последнюю величину определяют как производную угла по времени: $\omega = d\phi/dt$. Учитывая соотношение $\Delta S = R\Delta\phi$, получим связь между линейной и угловой скоростями при движении точки по окружности ($R = \text{const}$):

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = R \frac{d\phi}{dt} = R\omega. \quad (1.16)$$

Величину углового ускорения можно ввести аналогично (1.7):

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}. \quad (1.17)$$

Угловая скорость и ускорение являются векторами. Направление вектора угловой скорости ω связывается с осью вращения и выбирается таким образом, чтобы векторы $\vec{V}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$ (рис. 1.4) были взаимно перпендикулярны и составляли правую тройку векторов, то есть чтобы при вращении правостороннего винта от $\vec{\omega}$ к $\vec{R}$ направление его движения совпадало с направлением $\vec{V}$, что математически записывается в виде векторного произведения:

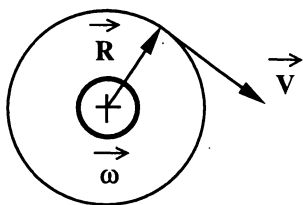


Рис. 1.4

$$\vec{V} = \left[\vec{\omega} \vec{R} \right]. \quad (1.18)$$

Вектор углового ускорения также направлен вдоль оси вращения:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad (1.19)$$

так как изменение вектора угловой скорости может происходить только вдоль этой оси. Связь между векторами линейного и углового ускорений можно получить, пользуясь правилами дифференцирования векторного произведения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\vec{\omega} \vec{R} \right] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{R} \right] + \left[\vec{\omega} \frac{d\vec{R}}{dt} \right]. \quad (1.20)$$

Так как $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}$, а $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$, то

$$\vec{a} = \left[\vec{\epsilon} \vec{R} \right] + \left[\vec{\omega} \vec{V} \right]. \quad (1.21)$$

Первое слагаемое в (1.21) определяет тангенциальную составляющую ускорения, а второе - нормальную, то есть тангенциальная составляющая ускорения

$a_t = \epsilon R$, а нормальная $a_n = \left[\vec{\omega} \vec{V} \right]$, $a_n = \omega^2 R = V^2/R$. При равномерном движении

по окружности a_n называется **центростремительным ускорением**.

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

F-сила измер 6 Н-каждоточек
 2.1. Сила и масса $\frac{F}{a} = m$

Динамика - раздел механики, изучающий причины, вызывающие движение. В основе динамики лежат три закона Ньютона, которые связаны с понятиями силы и массы.

Понятие силы можно ввести следующим образом: **сила** является мерой воздействия, оказываемого на данное тело со стороны другого тела, в результате чего либо изменяется скорость движения этого тела, либо оно деформируется. Не касаясь пока вопроса о деформации тел, отметим, что под действием одной и той же силы изменения скорости (ускорение) различных тел будут, вообще говоря, различны. Это связано с различной инертностью тел, под которой подразумевается их способность приобретать то или иное ускорение под действием данной силы. Мерой инертности тела служит **масса**.

Сила - величина векторная: если на тело действует несколько сил, то результирующее воздействие будет таково, как если бы на тело действовала одна сила, равная векторной сумме исходных сил. Масса представляет собой скалярную величину: общая масса нескольких тел определяется как алгебраическая сумма масс отдельных тел.

2.2. Инерциальные системы отсчета

При решении физических задач встает вопрос о выборе системы отсчета

(см. раздел 2.1). Решению этого вопроса посвящен **первый закон Ньютона**. Сформулировать этот закон можно следующим образом: существуют системы отсчета, в которых при равенстве нулю суммы сил, действующих на тело, оно будет либо покоиться, либо двигаться равномерно и прямолинейно. Такие системы отсчета называют **инерциальными**. Системы отсчета, в которых I закон Ньютона не выполняется, называются **неинерциальными** и в дальнейшем рассматриваться не будут.

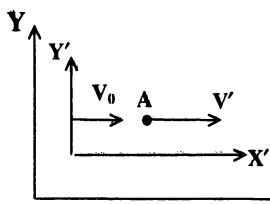


Рис. 2.1

Существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета, которые отличаются друг от друга только постоянными скоростями относительного движения.

Рассмотрим движение точки A относительно двух систем отсчета K и K' (рис. 2.1). Пусть система K' движется относительно системы K со скоростью V_0 . Если скорость точки A относительно системы K' равна V' , то относительно системы K она будет складываться из суммы скоростей V_0 и V' : $V = V_0 + V'$.

Таким образом, движение тела относительно обеих систем происходит с постоянной скоростью, то есть, если одна из них является инерциальной, то инерциальной является и другая.

Следовательно, первый закон Ньютона определяет понятие инерциальной системы отсчета и утверждает **равноправие всех инерциальных систем**: во всех инерциальных системах процессы, происходящие с телом, будут протекать одинаково. Из этого следует, что с помощью физического эксперимента невозможно отличить друг от друга различные инерциальные системы.

Опытным путем установлено, что инерциальной можно считать гелиоцентрическую (звездную) систему отсчета (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определенных звезд). Система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальна, однако эффекты,

обусловленные ее неинерциальностью, то есть, вращением вокруг собственной оси и вокруг Солнца, пренебрежимо малы для решения многих задач, и в этих случаях ее можно считать инерциальной.

2.3. Второй закон Ньютона

В инерциальных системах отсчета ускорение тела прямо пропорционально

действующей на него силе $\vec{F}$ (под $\vec{F}$ подразумевается векторная сумма всех действующих на тело сил) и обратно пропорционально массе m этого тела. В

этом и заключается **второй закон Ньютона**: $\vec{a} \sim \frac{\vec{F}}{m}$. Выбор коэффициента

пропорциональности связан с выбором системы единиц измерения силы. В системе СИ коэффициент пропорциональности выбирается равным единице. Тогда этот закон записывается в виде:

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ - 2-ой закон Ньютона. Равн. жёст. в вектор. виде.
 $\vec{P} = m \cdot \vec{v}$ - импульс (кол-во движ-ся) тела. $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ 2-ой закон Н. в дифференциальной форме.
 $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$

Уравнение (2.1) показывает также, что ускорение тела направлено в том же направлении, куда и равнодействующая всех приложенных к телу сил.

$[F] = [m] [a] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$. Такая единица измерения силы называется ньютоном (Н). $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$

Уравнение типа (2.1) называется уравнением движения или **основным уравнением динамики материальной точки**. В инерциальных системах отсчета второй закон Ньютона в виде (2.1) неприменим.

В механике большое значение имеет **принцип независимости действия сил**: если на материальную точку действуют одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно II закону Ньютона, как будто других сил не было. Согласно этому принципу, силы и ускорения можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач.

Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то, согласно принципу независимости действия сил, под силой во II законе Ньютона имеют в виду результирующую силу.

2.4. Третий закон Ньютона

Третий закон Ньютона утверждает, что при взаимодействии двух тел между ними возникают силы, равные по величине и действующие вдоль одной прямой в противоположных направлениях. То есть, если со стороны первого тела на

второе действует сила $\vec{F}_{12}$, а со стороны второго на первое - $\vec{F}_{21}$, тогда

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|, \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.2)$$

При этом имеется в виду, что эти силы приложены к различным телам и уничтожить друг друга не могут: каждое тело находится под действием только одной из этих сил.

Применяя III закон Ньютона к системе из нескольких взаимодействующих между собой тел, получим, что сумма внутренних сил, действующих между телами внутри системы, будет равна нулю. Если на систему не действуют внешние силы, такая система тел называется замкнутой.

3. СИЛЫ В ПРИРОДЕ

В механике приходится иметь дело с тремя видами сил:

- 1) силой тяжести;
- 2) силой трения;
- 3) силой упругости, возникающей при деформациях опоры или нити.

3.1. Сила тяготения

Между любыми двумя телами действуют силы взаимного притяжения, которые пропорциональны массам этих тел и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними:

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3.1)$$

При этом нужно иметь в виду, что сила притяжения (**гравитационная сила**) вида (3.1) действует между точечными телами, то есть при применении этой формулы необходимо, чтобы размеры тел с массами m_1 и m_2 были много меньше расстояния r между ними.

Из (3.1) следует, что масса в данном случае является величиной, характеризующей взаимное притяжение тел (**гравитационная масса**). С другой стороны, ускорение, приобретаемое телом под действием силы (2.1), также определяется массой, которая в отличие от массы, входящей в выражение (3.1), называется **инерционной**. Вообще говоря, нет оснований утверждать, что гравитационная и инерционная массы представляют собой одну и ту же характеристику тела. Но поскольку на основании опытных данных можно заключить, что обе массы пропорциональны друг другу, выбором соответствующего коэффициента пропорциональности в законе всемирного тяготения можно добиться равенства гравитационной и инерционной масс. Гравитационная постоянная $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ подобрана таким образом, чтобы гравитационная масса измерялась в **кг**, сила гравитационного взаимодействия - в **Н**, а расстояние - в **м**. В окончательном виде **закон всемирного тяготения имеет вид:**

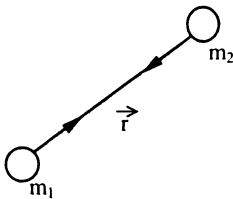


Рис. 3.1

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r},$$

где $\vec{F}$ - сила тяготения, приложенная к телу 2 (рис. 3.1) и

направленная в сторону притягивающего тела 1, а $\vec{r}$ - радиус-вектор, соединяющий тела 1 и 2. Очевидно, что со стороны тела 2 к телу 1 будет приложена сила, равная по величине силе (3.2), но направленная в противоположном направлении.

Можно доказать, что закон всемирного тяготения в виде (3.2), кроме точечных масс, справедлив и для шарообразных тел, если считать, что вся масса этих тел сосредоточена в их центре. Тогда, предполагая, что Земля представляет собой идеальный шар, можно считать, что сила, приложенная к любому телу, находящемуся на ее поверхности, — сила тяжести — будет направлена к центру Земли и равна:

$$F = \gamma \frac{m M}{R_3^2} = mg, \quad (3.3)$$

где M - масса Земли, R_3 - ее радиус, m - масса тела, находящегося на поверхности

Handwritten note:
 $F = \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{R^2}$
 (3.2)
 $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$
Значение гравитационной постоянной

Земли, причем его размеры много меньше радиуса Земли. Величина **g** в соответствии со вторым законом Ньютона (2.1) должна иметь размерность ускорения. Эта величина называется **ускорением свободного падения**, которое направлено к центру Земли и одинаково для всех тел у поверхности Земли.

Закон всемирного тяготения (3.3) позволяет вычислить **первую космическую скорость**, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником Земли, то есть вращалось с постоянной скоростью вокруг Земли на расстоянии от ее поверхности, много меньшем ее радиуса. Сила тяготения должна сообщать телу нормальное (центростремительное) ускорение, равное V^2/R . Тогда на основании II закона Ньютона с учетом (3.3)

$$m \frac{V^2}{R} = \gamma \frac{m M}{R_3^2} = mg, \quad (3.4)$$

откуда скорость движения тела по орбите вокруг Земли равна:

$$V = \sqrt{\gamma \frac{M}{R_3}} = \sqrt{R_3 \cdot g}. \quad (3.5)$$

Это и есть 1-ая космическая скорость.

Силу тяготения, определяемую у поверхности Земли в виде (3.3), не следует путать с силой веса - силой, с которой тело давит на опору или растягивает нить.

3.2. Сила трения

Всякое тело, движущееся по горизонтальной поверхности другого тела, при отсутствии действия на него других сил с течением времени замедляет свое движение и в конце концов останавливается. Это можно объяснить существованием **силы трения**, которая препятствует скольжению соприкасающихся тел друг относительно друга. Силы трения зависят от относительных скоростей тел. Силы трения могут быть разной природы, но в результате их действия механическая энергия всегда превращается во внутреннюю энергию соприкасающихся тел.

Различают внешнее (сухое) и внутреннее (жидкое или вязкое) трение. **Внешним трением** называется трение, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении. Если соприкасающиеся тела неподвижны друг относительно друга, говорят о **трении покоя**, если же происходит относительное перемещение этих тел, то в зависимости от характера их относительного движения говорят о **трении скольжения** или **качения**.

Внутренним трением называется трение между частями одного и того же тела, например между различными слоями жидкости или газа, скорости которых меняются от слоя к слою. В отличие от внешнего трения здесь отсутствует трение покоя. Если тела скользят друг относительно друга и разделены прослойкой вязкой жидкости (смазки), то трение происходит в слое смазки.

Контактное взаимодействие тел можно качественно описать, рассматривая микроскопическую картину их взаимодействия. В некоторых точках соприкосновения атомы поверхностных слоев двух тел настолько близко подходят друг к другу, что происходит "слипание" электронных оболочек атомов, то есть "зубцы"

на поверхности одного тела как бы проникают во "впадины" второго. Если одно из тел будет достаточно медленно скользить по поверхности другого, то "зубцы" начнут "цепляться" за "впадины", в результате чего сила взаимодействия между телами будет направлена под некоторым углом к поверхности раздела между ними (рис. 3.2).

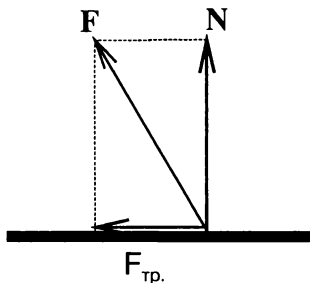


Рис. 3.2

$$F_{тр} = \mu \cdot F_{Nг} = \mu N \text{ сила трения скольж.}$$

Величина этого угла зависит от веществ, из которых изготовлены тела (характер "слипания" электронных оболочек), и степени шероховатостей (формы "зубцов" и "впадин"). Проекция силы взаимодействия F на нормаль к поверхности представляет собой силу нормального давления N , а проекция на направление вдоль границы раздела - силу трения $F_{тр}$. Тангенс угла наклона равнодействующей силы к нормали, проверенной к поверхности раздела называется **коэффициентом трения k** между этими поверхностями. Тогда:

$$F_{тр.} = k N, \quad (3.6)$$

коэффициент трения, очевидно, является безразмерной величиной.

Описанная выше сила трения называется **силой трения скольжения**. Но из повседневного опыта мы знаем, что, для того чтобы сдвинуть тело, лежащее на шероховатой поверхности, необходимо приложить достаточно большую силу. Сила, удерживающая тело в покое, называется **силой трения покоя**. Ее величина может изменяться от нуля до максимального значения, равного силе трения скольжения (3.6).

Для гладких поверхностей определенную роль начинает играть межмолекулярное притяжение. В этом случае применим **закон трения скольжения**, предложенный Б. В. Дерягиным:

$$F_{тр.} = f_{ист.} (N + S p_0),$$

где p_0 - добавочное давление, обусловленное силами межмолекулярного притяжения, которые быстро уменьшаются с увеличением расстояния между частицами, S - площадь контакта между телами, $f_{ист.}$ - истинный коэффициент трения скольжения.

Трение играет большую роль в природе и технике. В некоторых случаях силы трения оказывают вредное действие, в этих случаях их стараются уменьшать. Для этого на трущиеся поверхности наносят смазку, которая заполняет неровности между этими поверхностями и располагается тонким слоем между ними так, что поверхности как бы перестают касаться друг друга, а скользят друг относительно друга слои смазки. Сила трения, тем самым, уменьшается примерно в десятки раз.

Радикальным способом уменьшения силы трения является замена трения скольжения трением качения (шариковые и роликовые подшипники). **Сила трения качения** определяется по закону:

$$F_{тр.} = f_k N/r,$$

где r - радиус катящегося тела, f_k - коэффициент трения качения, $[f_k] = [m]$, N - сила нормального давления. То есть сила трения качения обратно пропорциональна радиусу катящегося тела.

$$F_k = \mu_k \frac{F_{Nг}}{R} \text{ сила трения качен.}$$

Современный Гуманитарный Университет
сила трения скольжения
сила трения качения.

3.3. Упругие силы

И, наконец, рассмотрим третий вид сил - упругие силы. Они возникают при деформации тел. **Деформацией твердого тела** называется изменение его размеров и объема, сопровождающееся чаще всего изменением формы тела. При деформациях происходят смещения частиц, находящихся в узлах кристаллических решеток твердых тел, из первоначальных положений равновесия в новые. Этому препятствуют силы взаимодействия между частицами. вследствие чего в деформированном теле возникают внутренние упругие силы, которые уравнивают внешние силы, приложенные к телу. **Упругой деформацией тела** называется такая деформация, при которой после прекращения действия внешней силы тело восстанавливает свою первоначальную форму.

Рассмотрим деформацию, возникающую при растяжении (или сжатии) тела. Если тело, первоначально имевшее длину l , под действием силы увеличило длину до l_1 , то величина $x = l_1 - l$ называется **абсолютным удлинением**, а величина $\varepsilon = x/l$ - **относительным удлинением** (сжатием).

Если изменение длины достаточно мало, то упругая сила, которая возникает в деформируемом теле (и противодействует действию внешней силы) пропорциональна величине абсолютного удлинения:

$$F = - kx, \text{ сила упругости} \quad \text{напр. в сфр. протитоп. деформации (3.7)}$$

где k - коэффициент пропорциональности, называемый **коэффициентом упругости** или **жесткостью тела**.

Если внешняя сила равномерно распределена по некоторой поверхности деформируемого тела S , то используют понятие **нормального напряжения** $\sigma = F/S$, под действием которого находится тело. При упругих деформациях напряжение пропорционально относительному удлинению тела:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \text{ закон Гука} \quad \left(\sigma = \frac{F}{S} \text{ напряж.} \right) \quad (3.8)$$

где E - модуль упругости или модуль Юнга.

Выражения (3.7) и (3.8), описывающие связь между величиной внешней силы или напряжения и изменением длины тела, выражают **закон Гука**, который справедлив в пределах упругой деформации.

3.4. Закон сохранения импульса

Второй закон Ньютона можно сформулировать в форме, отличной от (2.1):

Рассмотрим силу $\vec{F}$, действующую на тело массы m в течение некоторого времени dt . Умножив левую и правую часть уравнения движения (2.1) на dt , получим

$$\vec{F} dt = m \vec{a} dt. \quad (3.9)$$

Но по определению ускорения (1.7): $\vec{a} dt = d\vec{V}$. Считая массу тела неизменной, правую часть уравнения (3.9) можно записать в виде:

$m \frac{d\vec{V}}{dt} = d(m\vec{V})$. Произведение $\vec{F} dt$ называется **импульсом силы**, а $m\vec{V}$ -

импульсом или **количеством движения тела**. Таким образом, изменение количества движения тела определяется импульсом силы. Обозначив импульс

тела через $\vec{p}$, получим $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$. Тогда II закон Ньютона примет вид:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.10)$$

Если рассматривать систему тел, то для нее также будет справедливо уравнение (3.10). Но в этом случае под $\vec{p}$ нужно иметь в виду суммарный импульс

тел, составляющих систему, а под $\vec{F}$ - сумму внешних сил, действующих на систему, так как сумма внутренних сил, как доказано выше, равна нулю. Если

система является замкнутой ($\vec{F} = 0$), то величина импульса такой системы постоянна:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad \vec{p} = \text{const.} \quad \boxed{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const.}} \quad (3.11)$$

Полученный вывод (3.11) представляет собой один из фундаментальных законов природы - **закон сохранения импульса**.

Закон сохранения импульса справедлив не только в классической физике, хотя он и получен как следствие законов Ньютона. Эксперименты доказывают, что он выполняется и для замкнутых систем микрочастиц, которые подчиняются законам квантовой механики. Этот закон носит универсальный характер.

Закон сохранения импульса является следствием определенного свойства симметрии пространства - его однородности. Однородность пространства заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства и законы движения не изменяются, то есть не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета.

Следует отметить, что импульс сохраняется и для незамкнутой системы, если геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю.

В механике Галилея - Ньютона из-за независимости массы от скорости импульс системы может быть выражен через скорость ее центра масс. **Центром масс** или **центром инерции** системы материальных точек называется воображаемая точка С, положение которой характеризует распределение массы этой системы. Ее радиус-вектор равен:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (3.12)$$

где m_i и $\vec{r}_i$ - соответственно масса и радиус-вектор i -ой материальной точки, n -

число материальных точек в системе, $m = \sum_{i=1}^n m_i$ - масса системы.

Скорость центра масс:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m}. \quad (3.13)$$

Учитывая, что $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, а $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ есть импульс $\vec{p}$ системы, можно

считать, что

$$\vec{p} = m \vec{v}_c, \quad (3.14)$$

то есть импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Подставив выражение (3.14) в уравнение (3.10), получим

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}, \quad (3.15)$$

то есть центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему. Выражение (3.15) представляет собой **закон движения центра масс**.

Из закона сохранения импульса вытекает, что центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо находится в состоянии покоя.

4. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

4.1. Работа силы

Для строгого определения работы рассмотрим элементарное перемещение $\vec{dr}$, совершаемое телом под действием силы $\vec{F}$. Скалярное произведение двух этих векторов: $N = \frac{1}{\epsilon} (B_T = \frac{1.6 \text{ мВ}}{\epsilon}) \cdot \left(A = F \cdot S \cos(\vec{F}, \vec{S}) \right) \text{ Дж}$

$$F dr = F dr \cos \alpha = dA, \quad \begin{aligned} &\alpha = 0^\circ \text{ (} \vec{F} \text{ и } \vec{dr} \text{ сонаправлены) } A > 0 \\ &\alpha = 90^\circ \text{ (} \vec{F} \text{ и } \vec{dr} \text{ перпендикулярны) } A = 0 \\ &\alpha = 180^\circ \text{ (} \vec{F} \text{ и } \vec{dr} \text{ противоположно направлены) } A < 0 \end{aligned}$$

называется работой, совершаемой $\vec{F}$ при перемещении $\vec{dr}$. Здесь α - угол между направлением силы и направлением перемещения точки ее приложения.

Формула (4.1) определяет **элементарную работу** на столь малом участке пути, что на нем силу можно считать постоянной. Когда сила при перемещении точки ее приложения изменяется, нужно взять интеграл вдоль траектории от начальной точки 1 до конечной - 2:

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}. \quad (4.2)$$

Рассмотрим несколько случаев применения формулы (4.2).

Пусть сила F остается постоянной по величине и направлению. Тогда из-под интеграла (4.2) можно вынести абсолютную величину силы, и работа этой силы с учетом (4.1) будет равна:

$$A = F \int_1^2 \cos \alpha dr. \quad (4.3)$$

Под интегралом (4.3) стоит проекция элементарного перемещения $\vec{dr}$ на направление действия силы. Поэтому этот интеграл равен сумме проекций всех элементарных перемещений на указанное направление. В этом случае $A = FS_F$, где S_F - длина проекции пути на направление действия силы.

Примером, иллюстрирующим разобранный случай, служит работа силы тяжести вблизи поверхности Земли при движении тела по произвольной траектории. Поскольку величина силы тяготения, действующая на материальную точку массы m , постоянна и равна mg (3.3), а ее направление при малых перемещениях также можно считать постоянным, длина проекции траектории на направление силы тяжести есть изменение высоты тела Δh над поверхностью Земли, и следовательно, работа силы тяжести равна $A = mg \Delta h$.

Пусть теперь материальная точка совершает одномерное движение вдоль оси x под действием силы, направление которой постоянно и образует с осью x угол α . При этом величина силы может изменяться как функция координаты x . Тогда $\cos \alpha$ можно вынести из-под интеграла (4.2), и выражение для работы примет следующий вид:

$$A = \cos \alpha \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx. \quad (4.4)$$

Таким образом, работа A на отрезке (x_1, x_2) равна произведению $\cos \alpha$ на площадь фигуры, ограниченной кривой $F(x)$, вертикальными прямыми 1 и 2 и осью абсцисс. Применим этот результат для определения работы, совершаемой при деформации пружины, подчиняющейся закону Гука (3.7). При медленном растяжении пружины необходимо, чтобы в каждый момент времени действующая на пружину внешняя сила F равнялась бы по абсолютной величине и была бы противоположна по направлению упругой силе (3.7), то есть $F = kx$. Подставляя это выражение для силы в (4.5) и принимая $\cos \alpha = 1$ (направление силы и перемещения совпадают), получим, что для того, чтобы удлинить первоначально нерастянутую пружину на x , нужно затратить работу:

$$A = k \int_0^x x dx = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.5)$$

Очевидно, что если первоначальное абсолютное удлинение пружины было x_1 , а конечное - x_2 , то при растяжении была произведена работа:

$$A = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \quad (4.6)$$

В обоих случаях работа внешней силы не зависит от формы траектории, а определяется только начальной и конечной точками траектории.

Если на тело действует несколько сил $\vec{F}_i$, то из общих свойств скалярного произведения следует, что работа этих сил может быть представлена в виде:

$$dA = \sum_i \vec{F}_i d\vec{r} = \sum_i dA_i. \quad (4.7)$$

Иными словами, **работа равнодействующей нескольких сил** равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из этих сил.

Силы, действующие на материальную точку, могут зависеть от времени, то есть $\vec{F} = \vec{F}(t)$. Для расчета работы такой силы перемещение $d\vec{r}$ можно

представить в виде $d\vec{r} = \vec{V} dt$, где V - скорость тела в данный момент времени. Тогда работа, совершаемая силой за промежуток времени от t_1 до t_2 согласно (4.2):

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \vec{V} dt. \quad (4.8)$$

Для того, чтобы охарактеризовать способность какой-либо машины совершать работу, важно знать, за какое время эта работа совершается. Этому требованию удовлетворяет понятие мощности: мощностью N называется работа, совершенная силой за единицу времени $N = \frac{dA}{dt}$. Тогда согласно (4.8), если

на тело, движущееся в данный момент времени со скоростью $\vec{V}$, действует сила $\vec{F}$, то мощность равна:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{V}. \quad (4.9)$$

В качестве единицы работы в системе СИ служит джоуль (Дж):

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}, [A] = [F] [L].$$

Единицей мощности в СИ служит ватт (Вт), равный работе в 1 Дж, совершаемой за 1 с: $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$, $[N] = [A]/[t]$.

4.2. Кинетическая энергия

Если до начала действия силы тело покоилось, то в результате совершения силой работы оно получает некоторую скорость $\vec{V}$. Найдем связь между работой силы и скоростью, приобретаемой телом. Сначала для простоты будем считать, что постоянная сила $\vec{F}$ действует вдоль направления движения тела. Поскольку по II закону Ньютона $\vec{F} = m \vec{a}$, то работа $A = FS = maS$. Но, поэтому $aS = (at)^2/2$. Вспоминая, что $V = at$, получим, что $aS = V^2/2$. В результате данного случая:

$$A = \frac{m v^2}{2}. \quad (4.10)$$

Величина $T = mV^2/2$, стоящая в правой части (4.10), называется **кинетической энергией тела**. Таким образом, в результате совершения над покоящимся телом работы A у него появляется кинетическая энергия $T = A$. Выражение (4.10) нетрудно обобщить на случай движения тела по произвольной траектории под действием произвольной силы. Воспользовавшись уравнениями (4.2) и (4.8), в общем случае получим:

$$T_2 - T_1 = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = A, \quad (4.11)$$

т.е. работа сил (или равнодействующей всех сил), влияющих на материальную точку, идет на изменение ее кинетической энергии. При этом, если $A > 0$, кинетическая энергия возрастает ($T_2 > T_1$), а если $A < 0$, то убывает. В последнем случае можно сказать, что материальная точка совершает работу над тормозящим ее телом. Следовательно, кинетическая энергия характеризует способность тела

совершать работу.

Из соотношений (4.10) и (4.11) следует, что кинетическая энергия имеет размерность работы, и поэтому в системе СИ измеряется в джоулях: $[T] = \text{Дж}$.

4.3. Поле сил. Потенциальная энергия

Если на тело в каждой точке пространства действует сила, то говорят, что тело находится в **поле сил**. Так, вблизи поверхности Земли на тело действует сила тяжести, и следовательно, оно находится в **поле сил тяготения**. Если силы, действующие на тело, не изменяются во времени, то поле сил называется **стационарным**.

Стационарное поле, работа сил которого над телом, движущимся по замкнутой траектории, равна нулю, называется **консервативным**. Можно сказать, что работа консервативных сил зависит лишь от начального и конечного положений тела и не зависит от вида пути, по которому оно движется. Отметим, что верно также обратное утверждение: если работа сил поля не зависит от вида пути между двумя точками, то поле является консервативным.

Типичной неконсервативной силой является сила трения. Действительно, поскольку сила трения направлена противоположно скорости тела, ее работа по замкнутой траектории не равна нулю.

Если поле сил является консервативным, каждой точке поля можно поставить в соответствие значение некоторой функции $U(x, y, z)$ — такой, что разность значений этой функции в точках 1 и 2 будет равна работе сил при переходе частицы из точки 1 в точку 2:

$$A = U_1 - U_2. \quad (4.12)$$

Функция U носит название **потенциальной энергии тела** во внешнем поле.

Из (4.12) видно, что добавление к U произвольной постоянной величины не меняет значения работы при переходе тела из точки 1 в точку 2. Поэтому потенциальная энергия U определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной, которую выбирают из соображений удобства. Обычно потенциальную энергию считают равной нулю в какой-либо точке пространства, а энергию в других точках отсчитывают от этого условного уровня.

Конкретный вид функции U зависит от характера поля. В качестве примера определим потенциальную энергию в поле тяготения у поверхности Земли. В разделе 4.1 было показано, что работа силы тяготения равна $A = mg \Delta h = mg(h_1 - h_2)$ и не зависит от формы пути. Из (4.12) следует, что в этом случае:

$$U = mgh, \quad (4.13)$$

где h отсчитывается от произвольного уровня, например, от поверхности Земли.

Аналогично найдем потенциальную энергию пружины, подчиняющейся закону Гука. Поскольку согласно (4.6) работа упругой силы не зависит от формы пути, то сравнение (4.6) с (4.12) показывает, что потенциальная энергия сжатой пружины равна:

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad \text{энер. упруг. пруж. тела.} \quad (4.14)$$

При этом произвольная постоянная выбирается таким образом, что потенциальная энергия недеформированной пружины ($x=0$) считается равной нулю.

Зная вид функции $U(x, y, z)$, можно найти силу, действующую на тело в каждой точке пространства. Рассмотрим, например, перемещение тела вдоль оси x на dx . При этом поле совершает над частицей работу $dA = \vec{F} d\vec{x} = F_x dx$. Но согласно (4.12) эта работа может быть представлена как убыль потенциальной энергии

$$F_x dx = -dU, \text{ откуда получим, что } F_x = -\frac{dU}{dx} \quad (y = \text{const}, z = \text{const}).$$

В общем случае можно получить:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, \quad F_y = -\frac{dU}{dy}, \quad F_z = -\frac{dU}{dz}. \quad (4.15)$$

Для центральной силы $F(r)$, которая является функцией расстояния r от некоторого силового центра, можно записать:

$$F(r) = -\frac{dU}{dr}. \quad (4.16)$$

Потенциальная энергия в центральном поле зависит только от расстояния до центра и определяется таким образом, чтобы обращаться в нуль при $r \rightarrow 0$.

В качестве примера найдем потенциальную энергию массы в центральном поле тяготения, создаваемом массой M . На массу m действует в этом поле сила притяжения (3.2). Тогда согласно (4.16) получим после интегрирования:

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r} + U_0. \quad (4.17)$$

Постоянная интегрирования выбирается таким образом ($U_0 = 0$), что при $r \rightarrow \infty$ потенциальная энергия тела стремится к нулю. В этом случае физический смысл потенциальной энергии (4.17) заключается в том, что она равна работе, совершаемой полем тяготения при удалении массы m с расстояния r до ∞ .

4.4. Закон сохранения и превращения энергии

Пусть на тело действует консервативная сила, определяемая потенциальной энергией U , и неконсервативная сила F . Тогда при переходе из точки 1 в точку 2 над ним будет совершена работа $A = A_{\text{консерв.}} + A'$, где A' - работа неконсервативной силы. Согласно (4.11) $A = T_2 - T_1$, а из (4.12) следует, что $A_{\text{консерв.}} = U_1 - U_2$. Тогда получим, что $T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A'$, или $T_2 + U_2 = T_1 + U_1 + A'$. Определяя полную механическую энергию тела E как сумму кинетической T и потенциальной U энергий, получим, что $E_2 = E_1 + A'$, или $E_2 - E_1 = A'$, откуда следует, что изменение полной механической энергии равно работе неконсервативных сил. Таким образом получен **закон превращения механической энергии**: изменение полной механической энергии равно работе неконсервативных сил.

Если работа неконсервативных сил равна нулю, то полная механическая энергия сохраняется:

$$E = T + U = \text{const}. \quad (4.18)$$

В том случае, когда механическая система состоит из нескольких

невзаимодействующих тел, то законы сохранения и превращения механической энергии сохраняют свой вид, если под E подразумевается энергия, складывающаяся из суммарных кинетических и потенциальных энергий всех тел, составляющих систему. Таким образом, согласно (4.18) полная механическая энергия невзаимодействующих тел, на которые действуют только консервативные силы, остается постоянной. Соотношение (4.18) является законом сохранения механической энергии для замкнутой системы тел.

Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), называются **консервативными системами**. Закон сохранения механической энергии можно сформулировать так: в консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.

Закон сохранения механической энергии связан с однородностью времени, то есть с инвариантностью физических законов относительно выбора начала отсчета времени. Например, при свободном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят лишь от начальной скорости и продолжительности свободного падения тела и не зависят от того, в какой момент времени тело начало падать.

Существует еще один вид систем - **диссипативные системы**, в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии. Этот процесс получил название **диссипации** или **рассеяния** энергии. Строго говоря, все системы в природе являются диссипативными.

Если между телами механической системы помимо консервативных сил действуют такие неконсервативные силы, например, силы трения, то полная механическая энергия не сохраняется - изменение полной механической энергии равно работе внутренних неконсервативных сил.

4.5. Центральное соударение двух тел

Применяя законы сохранения энергии и импульса к исследованию соударения двух тел, ограничимся случаем **центрального удара** двух шаров. Удар называется центральным, если шары до удара движутся вдоль прямой, которая проходит через их центры, то есть либо шары движутся навстречу друг другу, либо один шар догоняет другой.

Рассмотрим два предельных случая: **абсолютно упругое** и **абсолютно неупругое соударения**.

При абсолютно упругом ударе соударяющиеся тела вначале испытывают упругие деформации сжатия. При этом часть кинетической энергии переходит в энергию упругой деформации. После соударения тела расходятся с некоторыми скоростями, причем вся энергия упругой деформации опять переходит в кинетическую энергию их движения.

Напишем уравнения законов сохранения импульса и механической энергии при абсолютно упругом соударении двух шаров массами m_1 и m_2 , имеющих начальные скорости V_1 и V_2 , направленные вдоль оси x :

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2, \quad (4.19)$$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2},$$

где U_1 и U_2 - неизвестные скорости шаров после столкновения.

Рассмотрим частные случаи абсолютно упругого соударения.

Если шары имеют одинаковую массу: $m = m_1 = m_2$, то из (4.19) следует, что $U_1 = V_2$ и $U_2 = V_1$, то есть в результате удара шары обменялись скоростями.

Случай, когда шар, имеющий скорость V_2 налетает на неподвижную стенку, можно промоделировать, предполагая, что масса стенки m_1 много больше массы шара m_2 . Устремляя в (4.19) m_1 к бесконечности, получим $U_2 = -V_2$, $U_1 = 0$, то есть шар отскочит от стенки с той же скоростью, с какой он налетел на нее, но в противоположном направлении.

При абсолютно неупругом ударе оба тела испытывают неупругие деформации, которые сохраняются после удара. После соударения тела движутся с одинаковыми скоростями как единое целое. В этом случае закон сохранения механической энергии не выполняется. Выполняется только закон сохранения импульса: $m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) U$, где U - скорость шаров после столкновения, которая равна:

$$U = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.20)$$

При абсолютно неупругом ударе часть кинетической энергии сталкивающихся шаров переходит в тепло.

5. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.1. Понятие об абсолютно твердом теле. Центр масс

В предыдущих главах рассматривалось движение тел, при котором их размеры и форма не играли существенной роли, и тела можно было рассматривать как материальные точки. Однако часто именно размеры и форма тел определяют характер их движения. Кроме того, тела так или иначе деформируются при движении в силу их упругих свойств. Если деформации настолько малы, что ими можно пренебречь в процессе движения, то тело будет рассматриваться как недеформируемое или абсолютно твердое. Вопросы, на которые можно ответить, считая тело недеформируемым, составляют предмет механики абсолютно твердого тела или, как в дальнейшем будем называть, просто твердого тела.

При рассмотрении движения твердого тела это тело всегда мысленно можно разбить на столь малые элементы, чтобы их размеры были малы по сравнению с расстояниями, пройденными ими. Тогда движение этих элементов можно представить как движение материальных точек. Так как твердое тело считается недеформируемым, то все расстояния между отдельными точками этой системы остаются неизменными. Между элементами, на которое разбито тело, при

движении могут действовать силы. Величина этих сил неизвестна, но, являясь внутренними, эти силы не играют роли в движении всего тела как целого, так как их сумма равна нулю. Написав уравнения движения для отдельных элементов, можно определить движение всего твердого тела. В качестве примера установим законы движения одной фиксированной точки твердого тела, называемой центром масс.

Считая элементы твердого тела материальными точками, применим к каждой из них II закон Ньютона. После суммирования по всем элементам тела получим:

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{V}_i = \sum_i \vec{F}_i, \quad (5.1)$$

где $\vec{F}_i$ - внешняя сила, действующая на i -ый элемент.

Положение центра масс определяется следующим образом. Если точка с массой m_i связана с началом координат радиус-вектором $\vec{r}_i$ с координатами x_i, y_i, z_i , то центру масс будет соответствовать радиус-вектор

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}. \quad (5.2)$$

Дифференцируя (5.2) по времени и учитывая, что $\sum_i m_i = m$ - масса твердого тела, получим:

$$m \vec{V} = \sum_i m_i \vec{V}_i, \quad (5.3)$$

где $\vec{V}$ - скорость центра масс. Твердое тело обладает таким импульсом, каким обладала бы материальная точка массы, равной массе тела, и движущейся так, как движется центр масс тела. Иначе говоря, если речь идет об импульсе твердого тела, можно заменить твердое тело материальной точкой той же массы, помещенной в центр масс данного тела.

Если подставить (5.3) в (5.1), то

$$\frac{d}{dt} (m \vec{V}) = \sum_i \vec{F}_i, \quad m \frac{d \vec{V}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (5.4)$$

так как масса тела остается постоянной. Уравнение (5.4) аналогично уравнению движения материальной точки. Центр масс твердого тела движется так же, как двигалась бы материальная точка той же массы под действием всех внешних сил, которые действуют на данное тело.

5.2. Движение твердого тела

Любое сложное движение твердого тела состоит из простых движений: поступательного и вращательного.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором каждая линия, соединяющая любые точки тела, сохраняет свое направление в пространстве. При поступательном движении тело движется, не поворачиваясь, и перемещение всех точек за какой-либо промежуток времени одинаково. Это значит, что при поступательном движении, зная движение какой-либо одной точки тела, можно определить движение всех остальных точек.

Движение твердого тела называется **плоским**, если во время движения любая точка тела остается в одной и той же плоскости. При этом траектория каждой точки лежит в своей плоскости, причем плоскости всех траекторий либо совпадают, либо параллельны друг другу.

Вращательным движением называется такое, при котором траектории всех точек тела являются концентрическими окружностями с центрами на одной прямой, называемой **осью вращения**. Ось может находиться вне тела или проходить через него. Она может как двигаться, так и покоиться. В дальнейшем ограничимся только плоским движением твердого тела. Вращение вокруг неподвижной оси всегда является плоским.

Для определения положения тела в пространстве достаточно знать положение любых трех точек этого тела, не лежащих на одной прямой, иначе говоря, задать положение любого недеформируемого треугольника, жестко связанного с телом.

При плоском движении жесткий треугольник, с помощью которого определяется положение тела, все время остается в одной плоскости. Плоское движение твердого тела может быть представлено как сумма поступательного движения и вращения вокруг оси. Когда тело одновременно участвует в поступательном и вращательном движениях, говорят о сложном движении твердого тела.

Поскольку (см. раздел 5.1) поступательное движение твердого тела можно полностью описать движением его центра масс, то есть свести к движению материальной точки, основное внимание в дальнейшем будет уделено вращательному движению твердого тела вокруг жестко связанной с ним оси.

5.3. Момент силы

Из повседневной жизни известно, что для того, чтобы заставить тело вращаться, важна не только величина силы, прикладываемой к телу, но и точка приложения этой силы. Это связано с тем, что при вращении тела основную роль играет не сила, приводящая это тело во вращение, а момент этой силы.

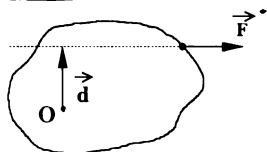


Рис. 5.1

Рассмотрим силу, приложенную к телу в плоскости, перпендикулярной оси вращения. На рис.5.1 точка О является следом оси, которая перпендикулярна плоскости рисунка. Тогда момент силы F будет равен произведению величины этой силы на ее плечо d:

$$M = Fd. \quad (5.5)$$

Плечо силы определяется как длина перпендикуляра, опущенного из точки О, через которую проходит ось, на направление действия силы, то есть как расстояние от оси до линии действия силы. Момент силы можно ввести также с

помощью радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки О в точку приложения силы $\vec{F}$. Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, то есть параллелен оси, и его направление определяется правилом правого винта при его вращении в направлении действия силы $\vec{F}$ (рис.5.1). Следовательно, $\vec{M} = \left[\vec{r} \vec{F} \right]$ или по абсолютной величине:

$$M = r F \sin \alpha, \quad (5.6)$$

где α - угол между направлением векторов $\vec{F}$ и $\vec{r}$. Величина M , представленная формулой (5.6), совпадает с определением (5.5), так как $d = r \sin \alpha$ (рис.5.1).

Можно доказать, что момент суммы сил равен сумме моментов этих сил:

$$\checkmark \left[\vec{r} \sum_i \vec{F}_i \right] = \sum_i \left[\vec{r}_i \vec{F}_i \right], \quad (5.7)$$

где $\vec{r}_i$ и $\vec{r}$ - радиусы-векторы сил $\vec{F}_i$ и $\sum_i \vec{F}_i$. Из (5.7) следует, что сумма моментов внутренних сил системы тел равна нулю.

Если на тело действует сила $\vec{F}$, не лежащая в плоскости перпендикулярной оси, ее можно разложить на две составляющие: $\vec{F}_{\parallel}$, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и $\vec{F}_{\perp}$, перпендикулярную этой плоскости. Для составляющей $\vec{F}_{\parallel}$ справедливы все определения (5.5) и (5.6). Составляющая $\vec{F}_{\perp}$ направлена вдоль оси вращения и не оказывает влияния на вращательное движение тела, так как момент этой силы перпендикулярен оси.

В свою очередь силу $\vec{F}_{\parallel}$ можно разложить на две составляющие: $\vec{F}_t$ - касательную к траектории движения точки приложения силы и $\vec{F}_n$ - нормальную к этой траектории. Так как при вращении тела около закрепленной оси траектории всех точек тела являются окружностями, то $\vec{F}_n$ будет направлена по радиусу, и момент $\vec{M}_n$ будет равен нулю. Тогда вращательный момент будет создавать

только сила $\vec{F}_\tau$. Момент этой силы согласно определению (5.6) будет равен:

$$\vec{M} = \vec{F}_\tau \bullet \vec{r}, \quad (5.8)$$

так как $\vec{F}_\tau$ перпендикулярна $\vec{r}$.

5.4. Момент инерции. Теорема Штейнера

Рассмотрим движение некоторого элемента тела, который можно принять за материальную точку, под действием тангенциальной силы F . Тогда, домножив правую и левую части уравнения второго закона Ньютона (2.1) на r , получим:

$$m r^2 \varepsilon = F r = M, \quad (5.9)$$

где в правой части уравнения согласно (5.8) имеем момент силы, действующей на точку. В левой части уравнения вращательного движения материальной точки (5.9) множитель при угловом ускорении называется **моментом инерции материальной точки**:

$$J = m r^2. \quad (5.10)$$

Для того чтобы найти **момент инерции твердого тела**, нужно просуммировать моменты инерции всех составляющих его элементов:

$$J = \sum_i m_i r_i^2. \quad (5.11)$$

Здесь r_i - расстояние до оси вращения элемента массой m_i .

Как указывалось выше, взяв элементы, на которые разбивается твердое тело, бесконечно малыми, можно перейти от суммирования к интегрированию, что позволяет вычислять моменты инерции различных тел. Для тела произвольной формы это является очень трудной задачей. Однако для однородного тела, имеющего ось симметрии, задача значительно упрощается. **Момент инерции однородного цилиндра** массой m и радиуса R относительно оси, проходящей через центр его основания перпендикулярно к нему, равен

$$J = \frac{m R^2}{2}. \quad (5.12)$$

Поскольку момент инерции не зависит от высоты цилиндра, формула (5.12) применима и для тонкого диска, если ось проходит через центр его основания и перпендикулярна к нему.

Важно обратить внимание на то, что величина момента инерции зависит от ориентации оси вращения относительно данного тела. Например, момент инерции тонкого цилиндра или диска (толщина $h \ll R$ - его радиуса) массой m относительно оси, проходящей через его центр параллельно его основанию, будет равен

$$J = \frac{m R^2}{4}. \quad (5.13)$$

Приведем также формулы для моментов инерции некоторых других тел. Для длинного стержня длиной l и массой m момент инерции относительно оси,

проходящей через его середину перпендикулярно его длине, равен

$$J = \frac{ml^2}{12} \quad (5.14)$$

независимо от формы сечения стержня, если характерный размер сечения $r \ll l$ (l - длина стержня).

Момент инерции шара радиуса R и массы m относительно любой оси, проходящей через его центр, равен:

$$J = \frac{2}{5} mR^2 \quad (5.15)$$

Нетрудно заметить, что моменты инерции тел, приведенные в формулах (5.12) - (5.15), зависят от осей, проходящих через центры масс этих тел. Значение момента инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс, можно рассчитать с помощью **теоремы Штейнера**. Для доказательства этой теоремы рассмотрим произвольное тело (рис. 5.2).

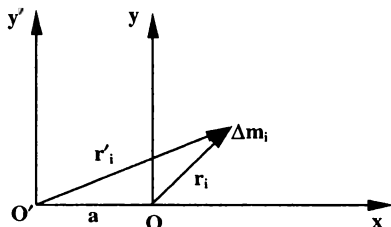


Рис. 5.2

Пусть ось O проходит через центр масс этого тела перпендикулярно плоскости рисунка, а ось O' , параллельная оси O , находится на расстоянии a от нее. Выберем начала координат систем отсчета x и x' в точках O и O' , причем оси x и x' совместим. Тогда между осями y и y' будет расстояние a . Пусть элемент массы m_i находится на расстояниях r_i и r'_i от осей O и O' и имеет координаты x_i и y_i относительно точки O и x'_i

и y'_i относительно точки O' . Тогда $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ и $r'^2 = x'^2 + y'^2 = (x_i + a)^2 + y_i^2$, так как $x'_i = x_i + a$ и $y_i = y'_i$. Момент инерции тела относительно оси O , проходящей через центр масс:

$J_0 = J_c + ma^2$ теорема Штейнера

$$J_0 = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) m_i. \quad (5.16)$$

Момент инерции относительно оси O' :

$$J = \sum_i m_i r_i'^2 = \sum_i m_i ([x_i + a]^2 + y_i^2). \quad (5.17)$$

Раскрывая в (5.17) скобки и группируя члены, получим:

$$J = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + 2a \sum_i m_i x_i + a^2 \sum_i m_i. \quad (5.18)$$

Первый член в выражении (5.18) совпадает с выражением (5.16), то есть представляет собой момент инерции относительно оси O , проходящей через центр масс. В третьем члене $\sum_i m_i = m$ - масса тела. Для того чтобы определить величину второго члена, вспомним формулу (5.2) для координат центра масс. В

$\frac{114}{461,2} \approx 0,247$

данном случае центр масс находится в начале координат системы xu , то есть

$$x_c = 0. \text{ Тогда согласно (5.2) } x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m} = 0, \text{ и следовательно, второй член в}$$

(5.18) равен нулю. В результате выражение (5.18) примет вид:

$$J = J_0 + ma^2. \quad (5.19)$$

Полученная формула (5.19) передает суть теоремы Штейнера: момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

5.5. Основное уравнение вращательного движения

$$M = J\varepsilon$$

Уравнение движения материальной точки при вращении (5.9) можно преобразовать к виду:

$$J_i \varepsilon = M_i, \quad (5.20)$$

где $J_i = m_i r_i^2$ - момент инерции i -го элемента твердого тела массы m_i , находящегося на расстоянии r_i от оси, а M_i - суммарный момент внешних и внутренних сил, действующих на этот элемент.

Суммируя по всем элементам твердого тела и учитывая, что они имеют одинаковое угловое ускорение, получим:

$$J \varepsilon = \sum_i M_i = M, \quad (5.21)$$

где $J = \sum m_i r_i^2$ - момент инерции твердого тела (5.11), а $\vec{M}$ - суммарный момент внешних сил, действующих на тело, так как сумма моментов внутренних сил равна нулю.

Уравнение (5.21) является **основным уравнением вращательного движения твердого тела**. Можно обратить внимание на сходство этого уравнения с уравнением второго закона Ньютона (2.1). При вращательном движении твердого тела массу заменяет момент инерции тела J , на месте линейного ускорения находится угловое ускорение ε , а роль силы $\vec{F}$ играет момент силы $\vec{M}$.

Так как векторы как момента силы, так и углового ускорения при вращении тела около закрепленной оси направлены вдоль этой оси, в то время как момент инерции является скалярной величиной, то в векторной форме уравнение (5.21) примет вид:

$$\vec{J} \varepsilon = \vec{M}. \quad (5.22)$$

6. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

6.1. Момент импульса

Введем понятие **момента импульса** на примере материальной точки. Если материальная точка массы m имеет импульс $\vec{P} = m \vec{V}$ и находится на расстоянии r от некоторой оси (рис. 6.1), то моментом импульса материальной точки относительно оси называется векторная величина:

$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{P}] = [\vec{r} m \vec{V}]. \quad (6.1)$$

Модуль этой величины, равный по определению векторному произведению $r \cdot P \cdot \sin \alpha$, можно записать, как произведение модуля импульса $|\vec{P}|$ на величину плеча $l = r \sin \alpha$ (рис. 6.1), а направление определяется по правилу правого винта при его вращении в направлении вектора $\vec{P}$ (на рис. 6.1 вектор момента импульса направлен перпендикулярно плоскости рисунка вдоль оси).

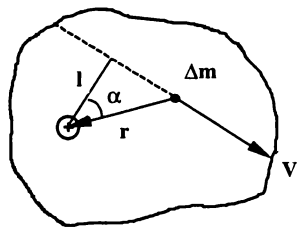


Рис. 6.1

Определяя эту величину, нужно подчеркнуть, что ее нельзя связывать только с вращательным движением: независимо от формы траектории частица может обладать моментом импульса.

В дальнейшем мы ограничимся только случаями, когда движение точек происходит в плоскости, перпендикулярной оси, причем будем считать ось жестко закрепленной. В этом случае вектор момента импульса всегда будет направлен вдоль этой оси, что соответствует плоскому движению (см. гл. 5).

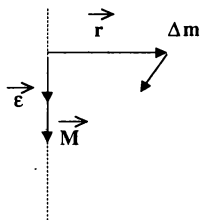
Определим связь между моментом внешних сил, действующим на частицу, и ее моментом импульса.

Для этого воспользуемся вторым законом Ньютона: если на частицу массы m действует сила F , то

$$\frac{d}{dt} (m \vec{V}) = \vec{F}.$$

Выберем какую-либо ось, перпендикулярную плоскости движения частицы и пересекающую ее в точке O . Расстояние от частицы до оси в данный момент времени определяется радиус-вектором $\vec{r}$ (рис. 6.2). Тогда, умножив обе части этого уравнения векторно на $\vec{r}$, после преобразования получим

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}. \quad (6.2)$$



Тогда производная по времени от момента импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно какой-либо неподвижной оси равна моменту $\vec{M}$ сил, действующих на материальную точку, относительно этой оси. Соотношение (6.2) носит название **уравнения моментов**.

Уравнение (6.2) справедливо для произвольного движения относительно любой произвольно выбранной оси. Для случая движения по окружности, если ось вращения проходит через ее центр, радиус-вектор $\vec{r}$ вращающейся частицы остается постоянным по величине, а его направление всегда перпендикулярно к направлению вектора импульса. Тогда момент импульса с учетом выражения (1.16) равен: $L = mVr = mr^2\omega$ и после дифференцирования получим: $\frac{dL}{dt} = mr^2 \frac{d\omega}{dt}$. Это выражение справедливо и в векторной форме:

$$mr^2 \frac{d\omega}{dt} = J \epsilon = \vec{M}. \quad (6.3)$$

Уравнение (6.3) совпадает по виду с основным уравнением вращательного движения (5.22). Таким образом, здесь показана **эквивалентность уравнения моментов и основного уравнения вращательного движения** применительно к движению материальной точки по окружности.

Вывод выражения (6.3) позволяет определить момент импульса материальной точки через угловую скорость в виде $\vec{L} = J \vec{\omega}$. Это выражение справедливо не только для случая движения по окружности, но и для движения относительно любой неподвижной оси. Так как для неподвижной оси направление вектора $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ совпадает с направлением оси, то можно записать:

$$\vec{L} = J \vec{\omega}. \quad \text{момент импульса} \quad (6.4)$$

От уравнения моментов для одной точки легко перейти к уравнению для системы материальных точек. Определяя момент импульса системы $\vec{L}$ как сумму моментов импульсов $\vec{L}_i$ отдельных точек $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i m \vec{V}_i]$ (здесь $\vec{r}_i$ - радиус-вектор i-й материальной точки), для системы материальных точек получим выражение (6.2), где $\vec{M}$ - сумма моментов внешних сил, действующих на указанную систему.

В том случае, когда все точки движутся по окружности вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, момент импульса системы выражается через момент инерции в виде, аналогичном (6.3) и (6.4), где $J = \sum m_i r_i^2$ - момент инерции системы относительно данной оси. Причем векторный вид выражения (6.3) отвечает случаю неподвижной оси.

Если вспомнить определение абсолютно твердого тела (см. разделы 5.1-5.2), то его движение представляется именно как движение системы материальных точек по окружности с одинаковой угловой скоростью. Таким образом, приведенные выше рассуждения распространяются и на вращательное движение твердого тела около неподвижной оси. В этом случае под J подразумевается

момент инерции твердого тела, а под $\vec{M}$ - суммарный момент внешних сил, приложенных к телу.

$$\vec{M} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

6.2. Закон сохранения момента импульса ✓

В том случае, когда сумма внешних сил равна нулю, то есть система является замкнутой (см. раздел 2.4) то из (6.2) следует, что

$$\vec{M} = 0 \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad \vec{L} = \text{const.}, \quad J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2 \quad (6.5)$$

что отвечает **закону сохранения момента импульса**: момент импульса замкнутой системы тел остается постоянным.

Пользуясь (6.4), получим

$$J \vec{\omega} = \text{const.} \quad (6.6)$$

Если ось вращения жестко закреплена, векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ могут изменяться только по величине, но не по направлению, и уравнения (6.5) и (6.6) можно записать в скалярной форме.

Требование замкнутости системы для выполнения закона сохранения момента импульса (6.5) не обязательно. Для этого достаточно, чтобы сумма моментов внешних сил относительно данной оси равнялась нулю. Тогда закон сохранения импульса будет верен для движения относительно оси.

В качестве примера рассмотрим поле центральных сил (см. раздел 4.3). Так как центральные силы всегда направлены к некоторой определенной точке O , то моменты этих сил относительно точки O равны нулю. Отсюда следует, что момент импульса тела относительно точки O в поле центральных сил должен сохраняться, так как

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_c = 0. \quad (6.7)$$

6.3. Кинетическая энергия вращающегося тела

Рассмотрим вращение материальной точки вокруг неподвижной оси. Так как линейная и угловая скорости вращения связаны соотношением (1.16), то для

кинетической энергии точки получим: $T_i = \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{J_i \omega^2}{2}$

(J_i - момент инерции материальной точки). Полная кинетическая энергия системы точек будет равна сумме кинетических энергий отдельных точек системы, и следовательно:

$$T = \sum T_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{J \omega^2}{2}. \quad (6.8)$$

Приведенные рассуждения для системы точек можно распространить и на случай вращения твердого тела относительно неподвижной оси. Таким образом, формула (6.8) выражает величину **кинетической энергии абсолютно твердого тела**, если под J подразумевать момент инерции твердого тела.

6.4. Работа внешних сил при вращении твердого тела

Пусть внешняя сила, приложенная к некоторой точке твердого тела на расстоянии r от оси вращения, направлена по касательной к окружности, по которой движется точка приложения силы. Пусть за время dt точка приложения силы перемещается по дуге окружности на расстояние dS . Работа, совершаемая силой F за время dt будет равна $A = F dS$. Величина dS равна длине дуги окружности радиуса r , и при повороте на угол $d\varphi$: $dS = r d\varphi$. В том случае, когда направление силы совпадает с направлением перемещения, совершается положительная работа $dA = F r d\varphi$. Если направление силы и перемещения противоположны, то работа силы отрицательна: $dA = - F r d\varphi$. Оба эти выражения можно объединить в одно:

$$dA = M d\varphi \cos \alpha \quad (6.9)$$

где $M = Fr$ - момент силы $\vec{F}$, α - угол между направлениями векторов $\vec{M}$ и $d\vec{\varphi}$. Направление вектора изменения угла $d\varphi$ совпадает с направлением вектора угловой скорости ω . Так как рассматривается вращение вокруг закрепленной оси, то векторы могут быть направлены только вдоль оси. Если они направлены в одну сторону ($\alpha = 0$), то совершается положительная работа, если направления их противоположны ($\alpha = 180^\circ$), то работа силы отрицательна.

В том случае, когда сила, совершающая работу, направлена под произвольным углом к оси вращения, результирующая формула для работы силы при вращательном движении не будет отличаться от (6.9). Это объясняется тем, что моменты всех составляющих произвольной силы, кроме тангенциальной, будут равны нулю при вращении вокруг закрепленной оси (см. раздел 5.3, рис. 5.1).

Так как работа dA совершается за время dt , то развиваемая за это время мощность N будет равна:

$$N = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt} = M\omega. \quad (6.10)$$

Если требуется найти работу сил, совершаемую за некоторый конечный интервал времени от t_1 до t_2 , то нужно просуммировать все элементарные работы (6.9), то есть

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = \int_{t_1}^{t_2} M \omega dt, \quad (6.11)$$

где φ_1 и φ_2 - углы поворота твердого тела в моменты времени t_1 и t_2 .

В том случае, когда момент силы, действующий на тело, постоянен, то величину M можно вынести из-под интеграла и

$$A = M \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M \Delta\varphi. \quad (6.12)$$

Воспользовавшись основным уравнением вращательного движения (5.22), найдем связь работы при вращательном движении с изменением кинетической энергии:

$$dA = J d\omega \frac{d\varphi}{dt} = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right), \quad (6.13)$$

то есть совершаемая за время dt работа идет на изменение кинетической энергии вращения.

6.5. Энергия сложного движения

Во многих случаях тело одновременно с вращением может двигаться и поступательно. Такое движение называется сложным. Одной из разновидностей сложного движения является плоское движение, особенности которого рассматривались в разделе 5.2.

Рассчитаем кинетическую энергию тела, совершающего плоское движение. Всякое движение можно в каждый момент времени представить как вращение вокруг оси, проходящей через точку, которая в этот момент покоится. Например, при качении колеса покоится точка обода, соприкасающаяся с дорогой. Такая ось называется **мгновенной осью вращения**. Нам важно то, что в каждый момент времени движение тела можно представить только как вращение вокруг этой оси. Тогда согласно (6.8) полная кинетическая энергия тела в некоторый момент

времени будет равна $T = \frac{J'\omega^2}{2}$, где ω - угловая скорость вращения тела, не

зависящая от выбора оси вращения (см. раздел 5.2), J' - момент инерции относительно мгновенной оси вращения. Если центр масс тела находится на

расстоянии a от мгновенной оси вращения, то по теореме Штейнера (см. раздел 5.4) момент инерции J' можно выразить через момент инерции тела относительно центра масс J с помощью соотношения: $J' = J + ma^2$ (m - масса тела). Подставив это соотношение в выражение для кинетической энергии, получим (с учетом того, что $\omega a = V$ - скорости центра масс):

$$T = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \quad (6.14)$$

Из (6.14) следует, что полная кинетическая энергия плоского движения твердого тела равна сумме кинетической энергии поступательного движения центра масс и кинетической энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс.

7. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

7.1. Колебательное движение

Среди явлений природы часто наблюдаются периодические, то есть регулярно повторяющиеся, процессы: смена дня и ночи, вращение Луны вокруг Земли, движение планет и т. д. Математическое определение периодической величины таково: если $f(t)$ - периодическая функция от времени t с периодом T , то для любого t выполняется соотношение

$$f(t + T) = f(t). \quad (7.1)$$

Таким образом, период колебаний равен времени, через которое движение полностью повторяется. Нужно иметь в виду, что колебательное движение может быть и неперiodическим.

Колебания, которые совершает система около положения равновесия после того, как она была выведена из состояния равновесия и представлена самой себе, носят названия **собственных или свободных колебаний**. Остановимся на рассмотрении колебательного движения механических систем: колебаниях материальной точки и твердого тела около положения равновесия.

В данной главе будет рассмотрен случай консервативных колебательных систем, в которых запас механической энергии остается постоянным. При этом ограничимся случаем гармонических колебаний.

7.2. Гармонические колебания

Гармонические колебания представляют собой периодический процесс, при котором смещение колеблющегося тела происходит по закону синуса или косинуса. Примером такого процесса может служить изменение длины проекций

радиуса-вектора $\vec{A}$, помещенного в начале координат при его вращении с постоянной угловой скоростью ω (рис. 7.1).

В некоторый момент времени t угол, на который повернулся радиус-вектор, $\varphi = \omega t$, и величины проекций на оси x и y можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \varphi_0), \\ y &= A \sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (7.2)$$

$\omega = 2\pi\nu$ ν - частота
 T - период колеб. ν - частота
 A - амплитуда
 x - смещение
 φ_0 - нач. фаза
 ω - угловая скорость
 ω - циклическая (круговая) частота.
 $\nu = \frac{1}{T}$ ν - частота
 $\omega = \frac{2\pi}{T}$

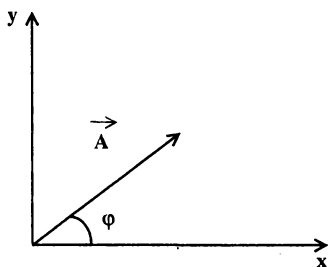


Рис. 7.1

Стоящая в скобках величина называется **фазой колебаний** - это аргумент функции в данный момент времени t . Значение фазы в момент $t = 0$ называется **начальной фазой колебаний** φ_0 . Следовательно, различие между колебаниями, происходящими по законам синуса и косинуса, заключается только в величине начальной фазы. Поэтому в дальнейшем ограничимся косинусоидальной зависимостью смещения от фазы колебаний. Из (7.2) видно, что максимальное значение смещения - **амплитуда**

колебаний - равно длине радиус-вектора $|\vec{A}|$. На основании определения (7.1) можно найти, что период гармонических колебаний равен $T = 2\pi/\omega$. Кроме **круговой частоты**, часто встречается величина, называемая **циклической частотой** или просто частотой колебаний $\nu = 1/T = 2\pi/\omega$, которая равна числу полных колебаний, совершаемых за единицу времени. Частота измеряется в герцах (Гц): **1 Гц = 1 с⁻¹**. Круговая частота, как и угловая скорость, измеряется в рад/с. Из приведенного выше определения следует одно из важнейших свойств гармонических колебаний: период колебаний не зависит от их амплитуды.

Если смещение точки от положения равновесия описывается уравнением (7.2), то ускорение и скорость точки также будут изменяться по гармоническому закону. Пользуясь определениями скорости и ускорения и обозначая дифференцирование по времени в виде штриха при дифференцируемой величине, получим:

$$V = x' = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (7.3)$$

$$a = x'' = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (7.4)$$

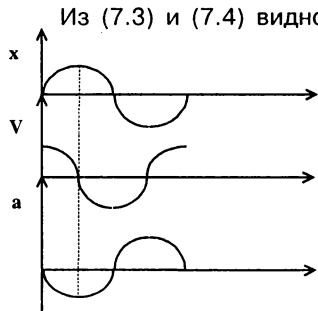


Рис. 7.2

Из (7.3) и (7.4) видно, что амплитуды колебаний скорости и ускорения различны: $A_v = |V_{\max}| = \omega A$, $A_a = |a_{\max}| = \omega^2 A$. Частота изменения скорости и ускорения при гармоническом процессе ω одинакова. Колебания скорости опережают колебания смещения по фазе на $\pi/2$, колебания ускорения опережают колебания смещения на π . Это отражено на рис. 7.2.

Согласно (7.2) и (7.4) связь между ускорением a и смещением x при гармонических колебаниях для любого момента времени дается соотношением:

$$a = -\omega^2 x \quad (7.5)$$

Умножая правую и левую части этого уравнения на массу колеблющейся точки m и учитывая II закон Ньютона, получим

$$F = ma = -m\omega^2 x \quad (7.6)$$

Таким образом устанавливается связь между силой, действующей на точку, и ее смещением при гармонических колебаниях, при отклонении от положения равновесия на него действует сила, прямо пропорциональная величине смещения и направленная в противоположную сторону. Поэтому эту силу часто называют вращающейся. Пользуясь (7.4), выражение (7.6) можно преобразовать к виду:

$$x'' = -\omega^2 x \text{ или } x'' + \omega^2 x = 0, \quad (7.7)$$

что представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее любой гармонический колебательный процесс независимо от его природы. С другой стороны, можно доказать, что решение уравнения (7.7) приводит к результату (7.2). Следовательно, любой гармонический процесс описывается этими уравнениями, и любое решение, удовлетворяющее этому уравнению, является гармоническим процессом.

Примером гармонических колебаний могут служить колебания груза на пружине. Пусть на пружине жесткостью k подвешен груз массы m . В положении равновесия пружина растянута на длину x_0 за счет действия веса груза: $mg = kx_0$. При смещении груза от положения равновесия на расстояние x со стороны пружины будет действовать сила $F = -k(x + x_0) + mg$. Знак минус означает, что сила направлена в сторону, противоположную смещению. По второму закону Ньютона: $ma = -k(x + x_0) + mg$. Пользуясь равенством сил в положении равновесия, получим уравнение колебаний $mx'' = -kx$ или $x'' = -k/mx$, откуда найдем выражение для частоты и периода собственных колебаний груза на пружине, сравнивая полученное уравнение с (7.7):

$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (7.8)$$

Выражения (7.8) верны только при малых отклонениях x от положения равновесия, так как использовавшийся при решении этой задачи закон Гука для упругих сил справедлив только при малых x .

Так как при гармонических колебаниях возвращающая сила (7.6) действует аналогично упругой силе, то силу (7.6) часто называют квазиупругой.

7.3. Физический и математический маятники

Физическим маятником называется тело, закрепленное на горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс. Пусть ось проходит через точку O (рис. 7.3) перпендикулярно плоскости колебаний, а центр масс находится в точке C на расстоянии a от оси. Если тело отклонить на угол α от положения равновесия, то на него будет действовать момент силы тяжести $M = mga \sin \alpha$ и тело начнет двигаться с угловым ускорением ϵ , определяемым основным уравнением вращательного движения $J\alpha = -mga \sin \alpha$, где J - момент инерции относительно оси, проходящей через точку O . Для малых α колебаний, когда $\sin \alpha \approx \alpha$, уравнение физического маятника примет вид:

$$J\alpha + mga\alpha = 0, \quad (7.9)$$

откуда частота и период собственных колебаний будут равны:

$$\omega = \sqrt{mga/J}, \quad T = 2\pi\sqrt{J/mga}. \quad (7.10)$$

Математическим маятником называется небольшое тело (материальная точка), подвешенное на длинной нити, то есть размерами тела по сравнению с длиной нити можно пренебречь. Если длина нити l , а масса тела m , то момент

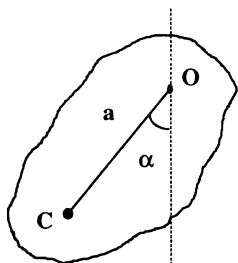


Рис. 7.

инерции тела относительно оси, проходящей через точку подвеса, $J = m l^2$. Подставляя это значение J в формулы (7.10), получим для малых колебаний математического маятника:

$$\omega = \sqrt{g/l}, \quad T = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (7.11)$$

Сравнение формул (7.10) и (7.11) приводит к выводу, что период колебаний физического маятника равен периоду математического маятника с длиной:

$$l_0 = J/ma \quad (7.12)$$

Величина l_0 называется **приведенной длиной** физического маятника. Тогда O' , находящаяся на расстоянии l_0 от оси на прямой, проходящей через центр масс, называется центром качания физического маятника. При этом $l_0 > a$. Можно доказать, что это неравенство выполняется всегда. Для этого воспользуемся теоремой Штейнера, согласно которой момент инерции J относительно оси, проходящей через центр качания, связан с моментом инерции J_0 относительно центра масс соотношением: $J = J_0 + ma^2$. Тогда (7.12) можно переписать в виде:

$$l_0 = \frac{J_0}{ma} + l, \quad \text{или} \quad l_0 - l = \frac{J_0}{ma} > 0, \quad (7.13)$$

так как момент инерции - величина положительная. Пользуясь (7.12) и (7.13), можно доказать, что в случае, когда ось вращения проходит через точку O' , центром качания становится точка O , а период колебаний (7.10) не изменяется.

Как физический, так и математический маятники обладают свойством **изохронности** при малых углах отклонения от положения равновесия, то есть период их колебаний не зависит от амплитуды.

7.4. Энергия колебательного движения

В рассматриваемых консервативных колебательных системах полная энергия колебаний сохраняется. Однако кинетическая и потенциальная энергии тела в процессе колебаний непрерывно меняются, переходя друг в друга.

Прежде, чем обмен между двумя формами энергии сформулировать математически, вспомним, что колебания происходят под действием квазиупругих сил, которые независимо от их природы пропорциональны смещению от положения равновесия: $F = -kx$. Нужно иметь в виду, что коэффициент пропорциональности k не обязательно представляет собой жесткость пружины, а может иметь совершенно иной физический смысл. Поэтому собственную частоту колебаний по аналогии с колебаниями груза на пружине можно в общем случае выразить формулой (7.8).

Тогда потенциальная энергия гармонических колебаний будет равна:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{kA^2}{4} [1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)]. \quad (7.14)$$

Кинетическая энергия колебаний выражается с помощью известной формулы:

$$T = \frac{mV^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{mA^2\omega^2}{4} [1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)]. \quad (7.15)$$

Из формул (7.14) и (7.15) следует прежде всего, что T и U колебательной системы изменяются с частотой, в два раза большей собственной частоты колебаний, то есть за один период колебаний каждая из энергий успевает дважды перейти в другой вид энергии. Действительно, потенциальная энергия, имея максимальное значение при амплитудном отклонении тела от положения равновесия, дважды за период полностью переходит в кинетическую энергию при прохождении телом положения равновесия.

При расчете полной энергии колебаний воспользуемся формулой (7.8), из которой следует, что $\omega^2 = k/m$. Тогда $k = mA^2/2 = mA^2\omega^2/2$. Складывая при этом условия выражения (7.14) и (7.15), получим

$$E = U + T = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}, \quad (7.16)$$

то есть при гармонических колебаниях полная энергия постоянна и пропорциональна квадрату амплитуды смещения или скорости.

8. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

8.1. Силы инерции

Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Системы отсчета, движущиеся относительно инерциальной системы с ускорением, называются **неинерциальными**. В неинерциальных системах законы Ньютона, вообще говоря, уже несправедливы. Однако законы динамики можно применять и для них, если кроме сил, обусловленных воздействием тел друг на друга, ввести в рассмотрение силы особого рода - так называемые **силы инерции**.

Если учесть силы инерции, то второй закон Ньютона будет справедлив для любой системы отсчета: произведение массы тела на ускорение в рассматриваемой системе отсчета равно сумме всех сил, действующих на данное

тело (включая и силы инерции). Силы инерции $\vec{F}_{ин}$ при этом должны быть такими, чтобы вместе с силами $\vec{F}$, обусловленными воздействием тел друг на друга, они сообщали телу ускорение $\vec{a}'$, каким оно обладает в неинерциальных системах отсчета, т. е.

$$m \vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин}. \quad (8.1)$$

Так как $\vec{F} = m \vec{a}$ ($\vec{a}$ - ускорение тела в инерциальной системе отсчета), то

$$m \vec{a}' = m \vec{a} + \vec{F}_{ин}. \quad (8.2)$$

Силы инерции обусловлены ускоренным движением системы отсчета относительно инерциальной системы, поэтому в общем случае нужно учитывать следующие виды проявления этих сил: 1) силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета; 2) силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета; 3) силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета.

8.2. Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета

Пусть на тележке к штативу на нити подвешен шарик массой m (рис. 8.1). Пока тележка покоится или движется равномерно и прямолинейно, нить, удерживающая шарик, занимает вертикальное положение и сила тяжести $\vec{P}$ уравнивается силой натяжения нити $\vec{T}$.

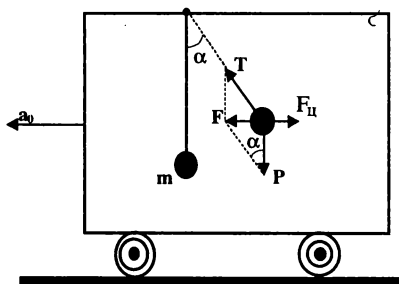


Рис. 8.1

Если тележку привести в поступательное движение с ускорением $\vec{a}_0$, то нить начнет отклоняться от вертикали назад до такого угла α , пока результирующая сила $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$ не обеспечит ускорение шарика, равное $\vec{a}_0$.

Таким образом, результирующая сила $\vec{F}$ направлена в сторону ускорения тележки $\vec{a}_0$ и для установившегося

движения шарика (шарик теперь движется вместе с тележкой с ускорением $\vec{a}_0$) равна

$$F = m g \operatorname{tg} \alpha = m a_0, \quad (8.3)$$

откуда угол отклонения нити от вертикали $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_0}{g}$, т. е. тем больше, чем больше ускорение тележки.

Относительно системы отсчета, связанной с ускоренно движущейся тележкой, шарик покоится, что возможно, если сила $\vec{F}$ уравнивается равной и противоположно направленной ей силой $\vec{F}_{\text{ин}}$, которая является ничем иным, как силой инерции, так как на шарик никакие другие силы не действуют. Таким образом,

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m \vec{a}_0. \quad (8.4)$$

Проявление сил инерции при поступательном движении наблюдается в повседневных явлениях. Например, когда поезд набирает скорость, то пассажир, сидящий по ходу поезда, под действием силы инерции прижимается к стенке сиденья. Наоборот, при торможении поезда сила инерции направлена в противоположную сторону и пассажир отклоняется от спинки сиденья. Особенно эти силы заметны при внезапном торможении поезда. Силы инерции проявляются в перегрузках, которые возникают при запуске и торможении космических кораблей.

8.3. Силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета

Пусть диск равномерно вращается с угловой скоростью ω ($\omega = \text{const}$) вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. На диске, на разных расстояниях от оси вращения, установлены маятники (на нитях подвешены шарики массой m). При вращении маятников вместе с диском шарики отклоняются от вертикали на некоторый угол (рис. 8.2).

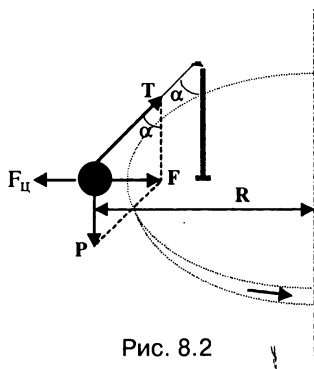


Рис. 8.2

В инерциальной системе отсчета, связанной, например, с помещением, где установлен диск, шарик равномерно вращается по окружности радиусом R (расстояние от точки крепления маятника к диску до оси вращения). Следовательно, на него действует сила, равная $F = m\omega^2 R$ и направленная перпендикулярно оси вращения диска. Она является

равнодействующей силы тяжести $\vec{P}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$: $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$. Когда движение шарика установится, то $F = mg \tan \alpha = m\omega^2 R$,

откуда

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2 R}{g}, \quad (8.5)$$

т. е. углы отклонения нитей маятников будут тем больше, чем больше расстояние R от шарика до оси вращения диска и чем больше угловая скорость вращения ω .

Относительно системы отсчета, связанной с вращающимся диском, шарик покоится, что возможно, если сила $\vec{F}$ уравнивается равной и противоположно направленной ей силой $\vec{F}_{\text{ц}}$, которая является ничем иным, как силой инерции, так как на шарик никакие другие силы не действуют. Сила $\vec{F}_{\text{ц}}$, называемая

центробежной силой инерции, направлена по горизонтали от оси вращения и равна

$$\vec{F}_ц = -m\omega^2 \vec{R} \quad (8.6)$$

Действию центробежных сил инерции подвергаются, например, пассажиры в движущемся транспорте на поворотах, летчики при выполнении фигур высшего пилотажа. Центробежные силы инерции используются во всех центробежных механизмах: насосах, сепараторах, где они достигают огромных значений. При проектировании быстро вращающихся деталей машин (роторов, винтов самолетов) принимаются специальные меры для уравнивания центробежных сил инерции.

Из формулы (8.6) вытекает, что центробежная сила инерции, действующая на тела во вращающихся системах отсчета в направлении радиуса от оси вращения, зависит от угловой скорости вращения ω системы отсчета и радиуса R . Следовательно, центробежная сила инерции действует во вращающихся системах отсчета на все тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние, независимо от того, покоятся ли они в этой системе (как мы предполагали до сих пор) или движутся относительно нее с какой-то скоростью.

8.4. Силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета

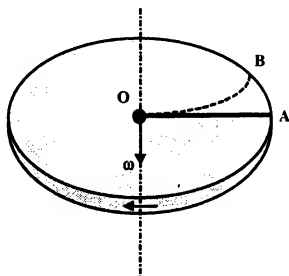


Рис. 8.3

Пусть шарик массой m движется с постоянной скоростью v' вдоль радиуса вращающегося диска ($v' = \text{const}$, $\omega = \text{const}$, $v' \perp \omega$). Если диск не вращается, то шарик, направленный вдоль радиуса, движется по радиальной прямой и попадает в точку А, если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик катится по кривой ОВ (рис. 8.3), причем его скорость v' относительно диска меняет свое направление. Это возможно лишь тогда, когда на шарик действует сила, перпендикулярная скорости v' .

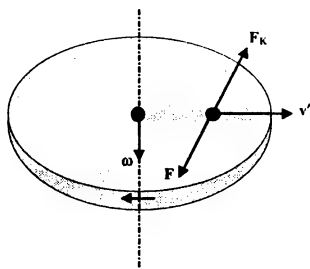


Рис. 8.4

Для того, чтобы заставить шарик катиться по вращающемуся диску вдоль радиуса, используем жестко укрепленный вдоль радиуса диска стержень, на котором шарик движется без трения равномерно и прямолинейно со скоростью v' (рис. 8.4). При отклонении шарика стержень действует на него с

некоторой силой $\vec{F}$. Относительно диска (вращающейся системы отсчета) шарик движется равномерно и прямолинейно, что можно объяснить тем, что сила $\vec{F}$ уравнивается приложенной к

шарику силой инерции $\vec{F}_k$, перпендикулярной скорости $\vec{v}'$. Эта сила называется **кориолисовой силой инерции** (сила Кориолиса).

Можно доказать, что сила Кориолиса

$$\vec{F}_k = 2m \left[\vec{v}' \rightarrow \vec{\omega} \right]. \quad (8.7)$$

Вектор $\vec{F}_k$ перпендикулярен векторам скорости $\vec{v}'$ тела и угловой скорости

→

вращения $\vec{\omega}$ системы отсчета в соответствии с правилом правого винта.

Сила Кориолиса действует только на тела, движущиеся относительно вращающейся системы отсчета, например относительно Земли. Поэтому действием этих сил объясняется ряд наблюдаемых на Земле явлений. Так, если тело движется в северном полушарии на север, то действующая на него сила Кориолиса, как это следует из выражения (8.7), будет направлена вправо по отношению к направлению движения, т. е. тело несколько отклоняется на восток (Рис. 8.5). Если тело движется на юг, то сила Кориолиса также действует вправо, если смотреть по направлению движения, т. е. тело отклоняется на запад. Поэтому в северном полушарии наблюдается более сильное подмывание правых берегов рек, правые рельсы железнодорожных путей по движению изнашиваются быстрее, чем левые. Аналогично можно показать, что в южном полушарии сила Кориолиса, действующая на движущиеся тела, будет направлена влево по отношению к направлению движения.

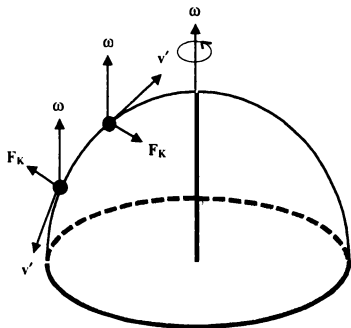


Рис. 8.5

Благодаря силе Кориолиса падающие на поверхность Земли тела отклоняются к востоку (на широте 60° это отклонение должно составлять 1 см при падении с высоты 100 м). С силой Кориолиса связано поведение маятника Фуко, явившееся в свое время одним из доказательств вращения Земли. Если бы этой силы не было, то плоскость колебаний качающегося вблизи поверхности Земли маятника оставалась бы неизменной (относительно Земли). Действие же сил Кориолиса приводит к вращению плоскости колебаний вокруг вертикального направления.

Раскрывая содержание $\vec{F}_{ин}$ в формуле (8.1), получим **основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета**:

$$m \vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_u + \vec{F}_{ul} + \vec{F}_k, \quad (8.8)$$

где силы инерции задаются соответствующими формулами (8.2), (8.6) и (8.7).

Обратим еще раз внимание на то, что силы инерции вызываются не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчета. Поэтому они не подчиняются третьему закону Ньютона, так как если на какое-либо тело действует сила инерции, то не существует противодействующей силы, приложенной к данному телу. Два основных положения механики, согласно которым ускорение всегда вызывается силой, а сила всегда обусловлена взаимодействием между телами, в системах отсчета, движущихся с ускорением, одновременно не выполняются.

Для любого из тел, находящихся в неинерциальной системе отсчета, силы инерции являются внешними; следовательно, здесь нет замкнутых систем. Это означает, что в неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения импульса, энергии и момента импульса. Таким образом, силы инерции действуют только в неинерциальных системах. В инерциальных системах отсчета таких сил не существует.

Возникает вопрос о “реальности” или “фиктивности” сил инерции. В ньютоновской механике, согласно которой сила есть результат взаимодействия тел, на силы инерции можно смотреть как на “фиктивные”, “исчезающие” в инерциальных системах отсчета. Однако возможна и другая их интерпретация. Так как взаимодействие тел осуществляется посредством силовых полей, то силы инерции рассматриваются как воздействия, которым подвергаются тела со стороны каких-то реальных силовых полей, и тогда их можно считать “реальными”. Независимо от того, рассматриваются ли силы инерции в качестве “фиктивных” или “реальных”, многие явления, о которых упоминалось выше, объясняются с помощью сил инерции.

Силы инерции, действующие на тела в неинерциальной системе отсчета, пропорциональны их массам и при прочих равных условиях сообщают этим телам одинаковые ускорения. Поэтому “в поле сил инерции” эти тела движутся совершенно одинаково, если только одинаковы начальные условия. Таким же свойством обладают тела, находящиеся под действием сил поля тяготения.

При некоторых условиях силы инерции и силы тяготения невозможно различить. Например, движение тел в равноускоренном лифте происходит точно так же, как и в неподвижном лифте, висящем в однородном поле тяжести. Никакой эксперимент, выполненный внутри лифта, не может отличить однородное поле тяготения от однородного поля сил инерции.

Аналогия между силами тяготения и силами инерции лежит в основе **принципа эквивалентности гравитационных сил и сил инерции (принципа эквивалентности Эйнштейна)**: все физические явления в поле тяготения происходят совершенно так же, как и в соответствующем поле сил инерции, если потенциалы обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают, а прочие начальные условия для рассматриваемых тел одинаковы. Этот принцип является основой **общей теории относительности**.

9. ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

9.1. Преобразования Галилея.

Принципы относительности Галилея и Эйнштейна

Если системы отсчета движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно и в одной из них справедливы законы динамики Ньютона, то эти

системы являются инерциальными. Установлено также, что во всех инерциальных системах отсчета законы классической динамики имеют одинаковую форму; в этом суть **механического принципа относительности (принципа относительности Галилея)**.

Для доказательства рассмотрим две системы отсчета: инерциальную систему К (с координатами x, y, z), которую условно будем считать неподвижной, и систему К' (с координатами x', y', z'), движущуюся относительно К равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{u}$ ($u = \text{const}$). Отсчет времени начнем с момента, когда начала координат обеих систем совпадают.

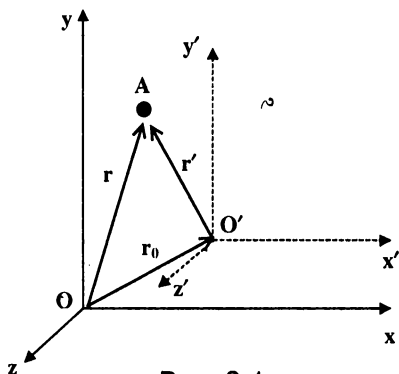


Рис. 9.1

Пусть в произвольный момент времени t расположение этих систем друг относительно друга имеет вид,

изображенный на рис. 9.1. Скорость $\vec{u}$ направлена вдоль OO' , радиус-вектор,

проведенный из O в O' , $\vec{r}_0 = \vec{u} t$.

Найдем связь между координатами произвольной точки A в обеих системах. Из рис. 9.1 видно, что

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 = \vec{r}' + \vec{u} t. \quad (9.1)$$

Уравнение (9.1) можно записать в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} x = x' + u_x t, \\ y = y' + u_y t, \\ z = z' + u_z t. \end{cases} \quad (9.2)$$

Уравнения (9.1) и (9.2) носят название **преобразований координат Галилея**.

В частном случае, когда система К' движется со скоростью $\vec{v}$ вдоль положительного направления оси x системы К (в начальный момент времени оси координат совпадают), преобразования координат Галилея имеют вид

$$\begin{cases} x = x' + v t, \\ y = y', \\ z = z'. \end{cases}$$

В классической механике предполагается, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчета, т. е. к преобразованиям (9.2) можно добавить еще одно уравнение:

$$t = t'. \quad (9.3)$$

Записанные соотношения справедливы лишь в случае классической механики ($u \ll c$), а при скоростях, сравнимых со скоростью света, преобразования Галилея заменяются более общими преобразованиями Лоренца.

Продифференцировав выражение (9.1) по времени (с учетом (9.3)), получим уравнение:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \quad (9.4)$$

которое представляет собой **правило сложения скоростей в классической механике**.

Ускорение в системе отсчета K

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}'.$$

Таким образом, ускорение точки A в системах отсчета K и K', движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, одинаково:

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (9.5)$$

Следовательно, если на точку A другие тела не действуют, ($\vec{a} = 0$), то, согласно (9.5) и $\vec{a}' = 0$, т. е. система K' является инерциальной (точка движется относительно нее равномерно и прямолинейно или покоится).

Таким образом, из соотношения (9.5) вытекает доказательство механического принципа относительности: уравнения динамики при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой не изменяются, т.е. являются инвариантными по отношению к преобразованиям координат. Галилей обратил внимание на то, что никакими механическими опытами, проведенными в данной инерциальной системе отсчета, нельзя установить, покоится ли она или движется равномерно и прямолинейно. Например, сидя в каюте корабля, движущегося равномерно и прямолинейно, мы не можем определить, покоится корабль или движется, не выглянув в окно.

Классическая механика Ньютона прекрасно описывает движение макротел, движущихся с малыми скоростями ($v \ll c$). Однако в конце XIX в. выяснилось, что выводы классической механики противоречат некоторым опытным данным, в частности при изучении движения быстрых заряженных частиц оказалось, что их движение не подчиняется законам механики. Далее возникли затруднения при попытках применить механику Ньютона к объяснению распространения света. Если источник и приемник света движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, то согласно классической механике измеренная скорость должна зависеть от относительной скорости их движения. Американский физик А. Майкельсон (1852-1913) в своем знаменитом опыте в 1881 г., а затем в 1887 г. совместно с Е. Морли (американский физик, 1838-1923) - опыт Майкельсона-Морли - пытался обнаружить движение Земли относительно эфира (эфирный ветер), применяя интерферометр Майкельсона. Обнаружить эфирный ветер

Майкельсону не удалось, как, впрочем, не удалось его обнаружить и в других многочисленных опытах. Опыты "упрямо" показывали, что скорости света в двух движущихся друг относительно друга системах равны. Это противоречило правилу сложения скоростей классической механики.

Одновременно было показано противоречие между классической теорией и уравнениями Дж. К. Максвелла (английский физик, 1831-1879), лежащими в основе представления света как электромагнитной волны.

Для объяснения этих и некоторых других опытных данных необходимо было создать новую механику, которая, объясняя эти факты, содержала бы ньютоновскую механику как предельный случай для малых скоростей ($v \ll c$). Это и удалось сделать А. Эйнштейну, одному из основателей современной физики. А. Эйнштейн пришел к выводу о том, что мирового эфира - особой среды, которая могла бы быть принята в качестве абсолютной системы, - не существует. Постоянство скорости распространения света в вакууме находилось в согласии с уравнениями Максвелла.

А. Эйнштейн заложил основы **специальной теории относительности**. Эта теория представляет собой современную физическую теорию пространства и времени, в которой, как и в классической ньютоновской механике, предполагается, что время однородно, а пространство однородно и изотропно. Специальная теория относительности часто называется также **релятивистской теорией**, а специфические явления, описываемые этой теорией, - **релятивистскими эффектами**.

В основе специальной теории относительности лежат **постулаты Эйнштейна**, сформулированные им в 1905 г.

1. Принцип относительности: никакие опыты (механические, электрические, оптические), проведенные внутри данной инерциальной системы отсчета, не дают возможности обнаружить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно; все законы природы инвариантны по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

2. Принцип инвариантности скорости света: скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Первый постулат Эйнштейна, являясь обобщением механического принципа относительности Галилея на любые физические процессы, утверждает, таким образом, что физические законы инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, а уравнения, описывающие эти законы, одинаковы по форме во всех инерциальных системах отсчета. Согласно этому постулату все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны, т.е. явления (механические, электродинамические, оптические) во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково.

Согласно второму постулату Эйнштейна, постоянство скорости света - фундаментальное свойство природы, которое констатируется как опытный факт.

Специальная теория относительности потребовала отказа от привычных представлений о пространстве и времени, принятых в классической механике, поскольку они противоречат принципу постоянства скорости света. Потеряло смысл не только абсолютное пространство, но и абсолютное время.

Постулаты Эйнштейна и теория, построенная на их основе, установили новый взгляд на мир и новые пространственно-временные представления, такие, как

относительность длин и промежутков времени, относительность одновременности событий. Эти и другие следствия из теории Эйнштейна находят надежное экспериментальное подтверждение, являясь тем самым обоснованием постулатов Эйнштейна - обоснованием специальной теории относительности.

9.2. Преобразования Лоренца

Анализ явлений в инерциальных системах отсчета, проведенный А. Эйнштейном на основе сформулированных им постулатов, показал, что классические преобразования Галилея несовместимы с ними и, следовательно, должны быть заменены преобразованиями, удовлетворяющими постулатам теории относительности.

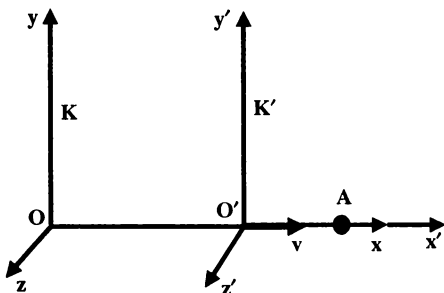


Рис. 9.2

Для иллюстрации этого вывода рассмотрим две инерциальные системы отсчета: K (с координатами x, y, z) и K' (с координатами x', y', z'), движущуюся относительно K (вдоль оси x) со

скоростью $\vec{v} = \text{const}$ (рис. 9.2). Пусть в начальный момент времени $t = t' = 0$, когда начала координат O и O' совпадают, излучается световой импульс. Согласно второму постулату Эйнштейна, скорость света в обеих

системах одна и та же и равна c . Поэтому если за время t в системе K сигнал дойдет до некоторой точки A , пройдя расстояние

$$x = ct, \quad (9.6)$$

то в системе K' координата светового импульса в момент достижения точки A :

$$x' = ct', \quad (9.7)$$

где t' — время прохождения светового импульса от начала координат до точки A в системе K' . Вычитая (9.6) из (9.7), получим

$$x' - x = c(t' - t).$$

Так как $x' \neq x$ (система K' перемещается по отношению к системе K), то $t' \neq t$, т. е. отсчет времени в системах K и K' различен - отсчет времени имеет относительный характер (в классической физике считается, что время во всех инерциальных системах отсчета течет одинаково, т. е. $t = t'$).

Эйнштейн показал, что в теории относительности классические преобразования Галилея, описывающие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой

$K \rightarrow K'$

$K' \rightarrow K$

$$\begin{cases} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = x' + vt, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t', \end{cases}$$

- заменяются преобразованиями Лоренца, удовлетворяющими постулатам Эйнштейна (формулы представлены для случая, когда K' движется относительно K со скоростью v вдоль оси x).

Эти преобразования предложены Лоренцом в 1904 г., еще до появления теории относительности, как преобразования, относительно которых инвариантны уравнения Максвелла.

Преобразования Лоренца имеют вид

$$K \rightarrow K'$$

$$K' \rightarrow K$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{array} \right. \quad (9.8)$$

$$\beta = v/c.$$

Из сравнения приведенных уравнений вытекает, что они симметричны и отличаются лишь знаком при v . Это очевидно, так как если скорость движения системы K' относительно системы K равна v , то скорость движения K относительно K' равна $-v$.

Из преобразований Лоренца вытекает также, что при малых скоростях (по сравнению со скоростью света), т. е. когда $\beta \ll 1$, они переходят в классические преобразования Галилея (в этом заключается суть **принципа соответствия**), которые являются, следовательно, предельным случаем преобразований Лоренца. При $v > c$ выражения (9.8) для x, t, x', t' теряют физический смысл (становятся мнимыми). Это находится, в свою очередь, в соответствии с тем, что движение со скоростью, большей скорости света в вакууме, невозможно.

Из преобразований Лоренца следует очень важный вывод о том, что как расстояние, так и промежуток времени между двумя событиями меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, в то время как в рамках преобразований Галилея эти величины считались абсолютными, не изменяющимися при переходе от системы к системе. Кроме того, как пространственные, так и временные преобразования (9.8) не являются независимыми, поскольку в закон преобразования координат входит время, а в закон преобразования времени - пространственные координаты, т.е. устанавливается взаимосвязь пространства и времени. Таким образом, теория Эйнштейна оперирует не с трехмерным пространством, к которому присоединяется понятие времени, а рассматривает неразрывно связанные пространственные и временные координаты, образующие четырехмерное пространство-время.

9.3. Одновременность событий в разных системах отсчета

Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 происходят два события. В системе K' им соответствуют координаты x_1' и x_2' и моменты времени t_1' и t_2' . Если события в системе K происходят в одной точке ($x_1 = x_2$) и являются одновременными ($t_1 = t_2$), то, согласно преобразованиям Лоренца (9.8)

$$x_1' = x_2', \quad t_1' = t_2',$$

т. е. эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой инерциальной системы отсчета.

Если события в системе K пространственно разобщены ($x_1 \neq x_2$), но одновременны ($t_1 = t_2$), то в системе K' , согласно преобразованиям Лоренца

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, & x_2' &= \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ t_1' &= \frac{1 - vx_1/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, & t_2' &= \frac{1 - vx_2/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ x_1' &\neq x_2', & t_1' &\neq t_2'. \end{aligned}$$

Таким образом, в системе K' эти события, оставаясь пространственно разобщенными, оказываются и неодновременными. Знак разности $t_2' - t_1'$ определяется знаком выражения $v(x_1 - x_2)$, поэтому в различных точках системы отсчета K' (при различных v) разность $t_2' - t_1'$ будет различной по величине и может отличаться по знаку. Следовательно, в одних системах отсчета первое событие может предшествовать второму, в то время как в других системах отсчета, наоборот, второе событие предшествует первому. Сказанное, однако, не относится к причинно-следственным событиям, так как можно показать, что порядок следования причинно-следственных событий одинаков во всех инерциальных системах отсчета.

9.4. Длительность событий в разных системах отсчета

Пусть в некоторой точке (с координатой x), покоящейся относительно системы K , происходит событие, длительность которого (разность показаний часов в конце и начале события) $\tau = t_2 - t_1$, где индексы 1 и 2 соответствуют началу и концу события. Длительность этого же события в системе K'

$$\tau' = t_2' - t_1', \quad (9.9)$$

причем началу и концу события согласно (9.8) соответствуют

$$t_1' = \frac{t_1 - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (9.10)$$

Подставляя (9.10) в (9.9), получим

$$\tau' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{или} \quad \tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (9.11)$$

Из соотношения (9.11) вытекает, что $\tau < \tau'$, т. е. *длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна*. Этот результат может быть еще истолкован следующим образом: интервал времени τ' , отсчитанный по часам в системе K' , с точки зрения наблюдателя в системе K , продолжительнее интервала τ , отсчитанного по его часам. Следовательно, *часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов*, т. е. ход часов замедляется в системе отсчета, относительно которой часы движутся. На основании относительности понятий “неподвижная” и “движущаяся” системы соотношения для τ и τ' обратимы. Из (9.11) следует, что замедление хода часов становится заметным лишь при скоростях, близких к скорости света в вакууме.

В связи с обнаружением релятивистского эффекта замедления хода часов в свое время возникла проблема “парадокса часов” (иногда рассматривается как “парадокс близнецов”), вызвавшая многочисленные дискуссии. Представим себе, что осуществляется фантастический космический полет к звезде, находящейся на расстоянии 500 световых лет (расстояние, на которое свет от звезды до Земли

доходит за 500 лет), со скоростью, близкой к скорости света ($\sqrt{1-\beta^2} = 0.001$). По земным часам полет до звезды и обратно продлится 1000 лет, в то время как для системы корабля и космонавта в нем такое же путешествие займет всего 1 год. Таким образом, когда космонавт возвратится на Землю, он будет в

$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ раз более молодым, чем его брат-близнец, оставшийся на Земле. Это явление, получившее название **парадокса близнецов**, в действительности парадокса не содержит. Дело в том, что принцип относительности утверждает равноправность не всяких систем отсчета, а только инерциальных. Неправильность рассуждения состоит в том, что системы отсчета, связанные с близнецами, - не эквивалентны: земная система инерциальна, а корабельная - неинерциальна, поэтому к ним принцип относительности неприменим.

Релятивистский эффект замедления хода часов является совершенно реальным и получил экспериментальное подтверждение при изучении нестабильных, самопроизвольно распадающихся элементарных частиц в опытах

с π -мезонами. Среднее время жизни покоящихся π -мезонов (по часам, движущимся вместе с ними) $\tau \approx 2,2 \cdot 10^{-8}$ с. Следовательно, π -мезоны, образующиеся в верхних слоях атмосферы (на высоте ≈ 30 км) и движущиеся со скоростью, близкой к скорости света, должны были бы проходить расстояние $c \cdot \tau \approx 6,6$ м, т. е. не могли бы достигать земной поверхности, что противоречит действительности. Объясняется это релятивистским эффектом замедления хода

времени: для земного наблюдателя срок жизни π -мезона $\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$, а путь

этих частиц в атмосфере $v \tau' = \beta c \tau' = \beta c \tau / \sqrt{1-\beta^2}$. Так как $\beta \approx 1$, то $v \tau' \gg c \tau$.

9.5. Длина тел в разных системах отсчета

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x' и покоящийся относительно системы K' . Длина стержня в системе K' будет $l'_0 = x'_2 - x'_1$, где x'_2 и x'_1 - не изменяющиеся со временем t' координаты начала и конца стержня, а индекс 0 показывает, что в системе отсчета K' стержень покоится. Определим длину этого стержня в системе K , относительно которой он движется со скоростью v . Для этого необходимо определить координаты его концов x_2 и x_1 в системе K в один и тот же момент времени t . Их разность $l = x_2 - x_1$ и даст длину стержня в системе K . Используя преобразования Лоренца (9.8), получим

$$l'_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ т. е.}$$

$$l'_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (9.12)$$

Таким образом, длина стержня, измеренная в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше длины, измеренной в системе, относительно которой он покоится. Если стержень покоится в системе K , то, определяя его длину в системе K' , опять-таки придем к выражению (9.12).

Из выражения (9.12) следует, что линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении

движения в $\sqrt{1-\beta^2}$ раз, т. е. так называемое **лоренцово сокращение длины тем больше, чем больше скорость движения**. Из второго и третьего уравнений преобразований Лоренца (9.8) следует, что:

$$y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1 \quad \text{и} \quad z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1,$$

т. е. **поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета**. Таким образом, **линейные размеры тела наибольшие в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело покоится**.

9.6. Релятивистский закон сложения скоростей

Рассмотрим движение материальной точки в системе K' , в свою очередь движущейся относительно системы K со скоростью v . Определим скорость этой же точки в системе K . Если в системе K движение точки в каждый момент времени t определяется координатами x, y, z , а в системе K' в момент времени t' - координатами x', y', z' , то

$$u_x = \frac{dx}{dt}, u_y = \frac{dy}{dt}, u_z = \frac{dz}{dt}$$

и

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, u'_y = \frac{dy'}{dt'}, u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

представляют собой соответственно проекции на оси x, y, z и x', y', z' вектора скорости рассматриваемой точки относительно систем K и K' .

Согласно преобразованиям Лоренца (9.8)

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, dy = dy', dz = dz',$$

$$dt = \frac{dt' + v dx' / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Произведя соответствующие преобразования, получаем **релятивистский закон сложения скоростей** специальной теории относительности:

$K' \rightarrow K$

$K \rightarrow K'$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}, \\ u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}, \\ u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}, \\ u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}, \\ u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}. \end{array} \right. \quad (9.13)$$

Если материальная точка движется параллельно оси x , то скорость u относительно системы K совпадает с u_x , а скорость u' относительно K' - с u'_x . Тогда закон сложения скоростей примет вид

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}, \quad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}}. \quad (9.14)$$

Легко убедиться в том, что если скорости v , u' и u малы по сравнению со скоростью света c , то формулы (9.13) и (9.14) переходят в закон сложения скоростей в классической механике. Таким образом, законы релятивистской механики в предельном случае для малых скоростей (по сравнению со скоростью света) переходят в законы классической физики, которая, следовательно, является частным случаем механики Эйнштейна для малых скоростей.

Релятивистский закон сложения скоростей подчиняется второму постулату Эйнштейна. Действительно, если $u' = c$, то формула (9.14) примет вид

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c \quad (\text{аналогично можно показать, что при } u = c \text{ скорость } u' \text{ также}$$

равна c). Этот результат свидетельствует о том, что релятивистский закон сложения скоростей находится в согласии с постулатами Эйнштейна.

Докажем также, что если складываемые скорости сколь угодно близки к скорости света c , то их результирующая скорость будет всегда меньше или равна c . В качестве примера рассмотрим предельный случай $u' = v = c$. После подстановки в формулу (9.14) получим $u = c$. Таким образом, при сложении любых скоростей результат не может превысить скорости света c в вакууме. *Скорость света в вакууме есть предельная скорость, которую невозможно превысить.*

9.7. Интервал между событиями

Преобразования Лоренца и следствия из них приводят к выводу об относительности длин и промежутков времени, значение которых в различных системах отсчета разное. В то же время относительный характер длин и промежутков времени в теории Эйнштейна означает относительность отдельных компонентов какой-то реальной физической величины, не зависящей от системы отсчета, т. е. являющейся инвариантной по отношению к преобразованиям координат. В четырехмерном пространстве Эйнштейна, в котором каждое событие характеризуется четырьмя координатами (x, y, z, t) , такой физической величиной является интервал между двумя событиями

$$s_{12} = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}, \quad (9.15)$$

где $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = l_{12}$ - расстояние между точками обычного трехмерного пространства, в которых эти события произошли. Введем

обозначение $t_{12} = t_2 - t_1$, получим $s = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}$.

Покажем, что интервал между двумя событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета. Обозначив $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ и $\Delta z = z_2 - z_1$, выражение (9.15) можно записать в виде

$$s_{12}^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

Интервал между теми же событиями в системе K' равен

$$(s'_{12})^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2. \quad (9.16)$$

Согласно преобразованиям Лоренца (9.8)

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z,$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v \Delta x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Подставив эти значения в (9.16), после элементарных преобразований получим, что

$$(s'_{12})^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2, \text{ т. е.}$$

$$(s'_{12})^2 = s_{12}^2.$$

Обобщая полученные результаты, можно сделать вывод, что интервал, определяя пространственно-временные соотношения между событиями, является инвариантом при переходе от одной инерциальной системы к другой. Инвариантность интервала означает, что, несмотря на относительность длин и промежутков времени, течение событий носит объективный характер и не зависит от системы отсчета.

Таким образом, пространственно-временные отношения являются не абсолютными величинами, как утверждала механика Галилея - Ньютона, а относительными. Следовательно, представления об абсолютном пространстве и времени являются несостоятельными. Кроме того, инвариантность интервала между двумя событиями свидетельствует о том, что пространство и время органически связаны между собой и образуют единую форму существования материи: - пространство-время. Пространство и время не существуют вне материи и независимо от нее.

9.8. Основной закон релятивистской динамики материальной точки

Согласно представлениям классической механики масса тела есть величина постоянная. Однако в конце XIX столетия при опытах с быстро движущимися

электронами было установлено, что масса тела зависит от скорости его движения, а именно: возрастает с увеличением скорости по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (9.17)$$

где m_0 - **масса покоя** материальной точки, т. е. масса, измеренная в той инерциальной системе отсчета, относительно которой материальная точка находится в покое; c - скорость света в вакууме; m - масса точки в системе отсчета, относительно которой она движется со скоростью v .

Из принципа относительности Эйнштейна, утверждающего инвариантность всех законов природы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, следует условие инвариантности уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца. Основным закон динамики Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

оказывается также инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца, если в нем справа стоит производная по времени от **релятивистского импульса**.

Основной закон релятивистской динамики материальной точки имеет вид

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \vec{v} \right) \text{ или} \quad (9.18)$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (9.19)$$

где

$$\vec{p} = m \vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \vec{v} \quad (9.20)$$

- **релятивистский импульс** материальной точки.

Отметим, что уравнение (9.19) внешне совпадает с основным уравнением ньютоновской механики. Однако физический смысл его другой: справа стоит производная по времени от *релятивистского импульса*, определяемого формулой (9.20). Таким образом, уравнение (9.18) инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца и, следовательно, удовлетворяет принципу относительности Эйнштейна. Следует учитывать, что ни импульс, ни сила не являются инвариантными величинами. Более того, в общем случае ускорение не совпадает по направлению с силой.

В силу *однородности пространства* в релятивистской механике выполняется

закон сохранения релятивистского импульса: релятивистский импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени. Часто вообще не оговаривают, что рассматривают релятивистский импульс, так как если тела движутся со скоростями, близкими к c , то можно использовать только релятивистское выражение для импульса.

Анализ формул (9.17), (9.20) и (9.18) показывает, что при скоростях, значительно меньших скорости света, уравнение (9.18) переходит в основной закон классической механики. Следовательно, условием применимости законов классической (ньютоновской) механики является условие $v \ll c$. Законы классической механики получаются как следствие теории относительности для предельного случая $v \ll c$ (формально переход осуществляется при $c \rightarrow \infty$). Таким образом, *классическая механика - это механика макротел, движущихся с малыми скоростями* (по сравнению со скоростью света в вакууме).

9.9. Закон взаимосвязи массы и энергии

Найдем кинетическую энергию релятивистской частицы (материальной точки). Приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном перемещении равно работе силы на этом перемещении:

$$dT = dA \quad \text{или} \quad dT = \vec{F} d\vec{r}. \quad (9.21)$$

Учитывая, что $d\vec{r} = \vec{v} dt$, и подставив в (9.21) выражение (9.18), получим

$$dT = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \vec{v} dt = \vec{v} d \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Преобразовав данное выражение с учетом того, что $\vec{v} d\vec{v} = v dv$, и формулы (9.18), придем к выражению

$$dT = d \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = c^2 dm, \quad (9.22)$$

т. е. приращение кинетической энергии частицы пропорционально приращению ее массы.

Так как кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а ее масса равна массе покоя m_0 , то, проинтегрировав (9.22), получим

$$T = (m - m_0) c^2, \quad (9.23)$$

или кинетическая энергия релятивистской частицы имеет вид

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (9.24)$$

Выражение (9.24) при скоростях $v \ll c$ переходит в классическое:

$$T = m_0 \frac{v^2}{2}$$

(разлагая в ряд $(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \times \frac{v^4}{c^4} + \dots$ при $v \ll c$, правомерно

пренебречь членами второго порядка малости).

А. Эйнштейн обобщил положение (9.22), предположив, что оно справедливо не только для кинетической энергии материальной точки, но и для полной энергии, а именно: любое изменение массы Δm сопровождается изменением полной энергии материальной точки,

$$\Delta E = c^2 \Delta m. \quad (9.25)$$

Отсюда А. Эйнштейн пришел к универсальной зависимости между полной энергией тела E и его массой m :

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9.26)$$

Уравнение (9.26), равно как и (9.25), выражает *фундаментальный закон природы - закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии*: полная энергия системы равна произведению ее массы на квадрат скорости света в вакууме. Отметим, что в полную энергию E не входит потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле.

Закон (9.26) можно, учитывая выражение (9.23), записать в виде

$$E = m_0 c^2 + T,$$

откуда следует, что покоящееся тело ($T = 0$) также обладает энергией

$$E_0 = m_0 c^2,$$

называемой **энергией покоя**. Классическая механика энергию покоя E_0 не учитывает, считая, что при $v = 0$ энергия покоящегося тела равна нулю.

В силу *однородности времени* в релятивистской механике, как и в классической, выполняется **закон сохранения энергии**: полная энергия замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Из формул (9.26) и (9.20) найдем релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом частицы:

$$E^2 = m^2 c^4 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2,$$

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (9.27)$$

Уравнение (9.26) имеет *универсальный характер*. Оно применимо ко всем формам энергии, т. е. можно утверждать, что с энергией, какой бы формы она ни была, связана масса

$$m = \frac{E}{c^2} \quad (9.28)$$

и, наоборот, со всякой массой связана определенная энергия.

Закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии блестяще подтвержден экспериментом о выделении энергии при протекании ядерных реакций. Он широко используется для расчета энергетических эффектов при ядерных реакциях и превращениях элементарных частиц.

Основной вывод теории относительности сводится к тому, что пространство и время органически взаимосвязаны и образуют единую форму существования материи - пространство-время. Только поэтому пространственно-временной интервал между двумя событиями является абсолютным, в то время как пространственные и временные промежутки между этими событиями относительны. Следовательно, вытекающие из преобразований Лоренца следствия являются выражением объективно существующих пространственно-временных соотношений движущейся материи.

10. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ

10.1. Давление в жидкости и газе

Молекулы газа, совершая беспорядочное, хаотическое движение, не связаны или весьма слабо связаны силами взаимодействия, поэтому они движутся свободно и в результате соударений стремятся разлететься во все стороны, заполняя весь предоставленный им объем, т. е. объем газа определяется объемом того сосуда, который газ занимает.

Как и газ, жидкость принимает форму того сосуда, в который она заключена. Но в жидкостях в отличие от газов среднее расстояние между молекулами остается практически постоянным, поэтому жидкость обладает практически неизменным объемом.

Хотя свойства жидкостей и газов во многом отличаются, в ряде механических явлений их поведение определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями. Поэтому **гидроаэромеханика** - раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твердыми телами, - использует *единый подход* к изучению жидкостей и газов.

В механике с большой степенью точности жидкости и газы рассматриваются как **сплошные**, непрерывно распределенные в занятой ими части пространства. Плотность жидкости мало зависит от давления. Плотность же газов от давления зависит существенно. Из опыта известно, что сжимаемостью жидкости во многих задачах можно пренебречь и пользоваться единым понятием **несжимаемой жидкости** - жидкости, плотность которой всюду одинакова и не изменяется со временем.

Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку, то части жидкости, находящиеся по разные стороны от нее, будут действовать на каждый ее элемент

ΔS с силами $\Delta \vec{F}$, которые независимо от того, как пластинка ориентирована, будут равны по модулю и направлены перпендикулярно площадке ΔS , так как наличие касательных сил привело бы частицы жидкости в движение.

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется **давлением** p жидкости:

$$p = \Delta F / \Delta S.$$

Единица давления - **паскаль** (Па): 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м² (1 Па = 1 Н/м²).

Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется закону Паскаля: давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.

Рассмотрим, как влияет вес жидкости на распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости. При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Если жидкость несжимаема, то ее плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении S столба жидкости, его высоте h и плотности ρ вес $P = \rho gSh$, а давление на нижнее основание

$$p = P/S = \rho gSh/S = \rho gh, \quad (10.1)$$

т. е. давление изменяется линейно с высотой. Давление ρgh называется гидростатическим давлением.

Согласно формуле (10.1) сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, определяемая **законом Архимеда**: на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа):

$$F_A = \rho gV,$$

где ρ - плотность жидкости, V - объем погруженного в жидкость тела.

10.2. Уравнение неразрывности

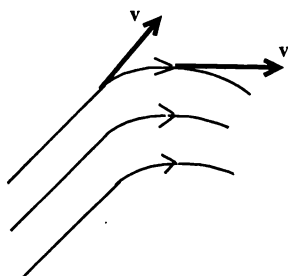


Рис. 10.1

Движение жидкостей называется течением, совокупность частиц движущейся жидкости - потоком. Графически движение жидкостей изображается с помощью линий тока, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рис. 10.1). Линии тока проводятся так, чтобы густота их, характеризующая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была больше там, где

больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течет медленнее. Таким образом, по картине линий тока можно судить о направлении и модуле скорости в разных точках пространства, т. е. можно определить состояние движения жидкости. Линии тока в жидкости можно "проявить", например, подмешав в нее какие-либо заметные взвешенные частицы.

Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют **трубкой тока**. Течение жидкости называется **установившимся** (или **стационарным**), если

форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке со временем не изменяются.

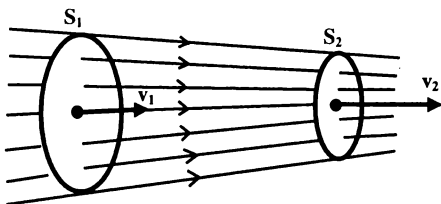


Рис. 10.2

Рассмотрим какую-либо трубку тока (рис. 10.2). Выберем два ее сечения S_1 и S_2 перпендикулярные направлению скорости.

За время Δt через сечение S проходит объем жидкости $Sv\Delta t$; следовательно, за 1 с через S_1 пройдет объем жидкости S_1v_1 , где v_1 - скорость течения жидкости в месте сечения S_1 . Через сечение S_2 за 1 с пройдет объем

жидкости S_2v_2 , где v_2 - скорость течения жидкости в месте сечения S_2 . Здесь предполагается, что скорость жидкости в сечении постоянна. Если жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$), то через сечение S_2 пройдет такой же объем жидкости, как и через сечение S_1 , т. е.

$$S_1v_1 = S_2v_2 = \text{const}. \quad (10.2)$$

Следовательно, произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока. Соотношение (10.2) называется **уравнением неразрывности** для несжимаемой жидкости.

10.3. Уравнение Бернулли

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости (физическая абстракция, т. е. воображаемая жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения) трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2 , по которой слева направо течет жидкость (рис. 10.3). Пусть в месте сечения S_1 скорость течения v_1 , давление p_1 и высота, на которой это сечение расположено, h_1 . Аналогично, в месте сечения S_2 скорость течения v_2 , давление p_2 и высота сечения h_2 . За малый промежуток времени Δt жидкость перемещается от сечений S_1 и S_2 к сечениям S_1' и S_2' .

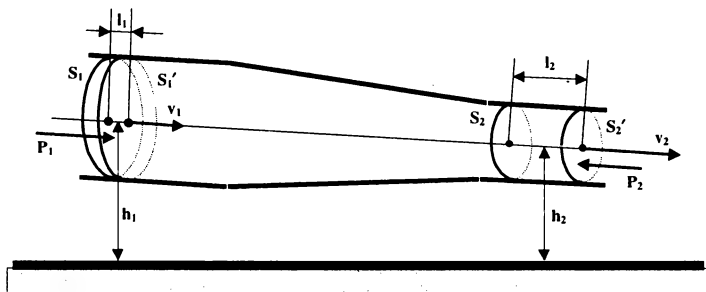


Рис. 10.3

Согласно закону сохранения энергии изменение полной энергии $E_2 - E_1$ идеальной несжимаемой жидкости должно быть равно работе A внешних сил по

перемещению массы m жидкости:

$$E_2 - E_1 = A, \quad (10.3)$$

где E_1 и E_2 - полные энергии жидкости массой m в местах сечений S_1 и S_2 соответственно.

С другой стороны, A - это работа, совершаемая при перемещении всей жидкости, заключенной между сечениями S_1 и S_2 , за рассматриваемый малый промежуток времени Δt . Для перенесения массы m от S_1 до S_1' жидкость должна переместиться на расстояние $l_1 = v_1 \Delta t$ и от S_2 до S_2' - на расстояние $l_2 = v_2 \Delta t$. Отметим, что l_1 и l_2 настолько малы, что всем точкам объемов $S_1 l_1$ и $S_2 l_2$ приписывают постоянные значения скорости v , давления p и высоты h . Следовательно,

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2, \quad (10.4)$$

где $F_1 = p_1 S_1$ и $F_2 = -p_2 S_2$ (отрицательна, так как направлена в сторону, противоположную течению жидкости; рис. 10.3).

Полные энергии E_1 и E_2 будут складываться из кинетической и потенциальной энергий массы m жидкости:

$$E_1 = \frac{m v_1^2}{2} + m g h_1 \quad (10.5)$$

$$E_2 = \frac{m v_2^2}{2} + m g h_2 \quad (10.6)$$

Подставляя (10.5) и (10.6) в (10.3) и приравнявая (10.3) и (10.4), получим:

$$\frac{m v_1^2}{2} + m g h_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{m v_2^2}{2} + m g h_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t. \quad (10.7)$$

Согласно уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости (10.2) объем, занимаемый жидкостью, остается постоянным, т.е.

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t.$$

Разделив выражение (10.7) на ΔV , получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2,$$

где ρ - плотность жидкости. Но так как сечения выбирались произвольно, то можем записать

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \quad (10.8)$$

Выражение (10.8) выведено швейцарским физиком Д. Бернулли (1700 - 1782; опубликовано в 1738 г.) и называется уравнением Бернулли. Как видно из его вывода, уравнение Бернулли - выражение закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости. Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, внутреннее трение которых не очень велико.

Величина p в формуле (10.8) называется **статическим давлением** (давление жидкости на поверхность обтекаемого ею тела), величина $\rho v^2/2$ - **динамическим давлением**, величина ρgh - **гидростатическим давлением**.

Для горизонтальной трубки тока ($h_1 = h_2$) выражение (10.8) примет вид

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const.}, \quad (10.9)$$

где $p + \rho v^2/2$ называется **полным давлением**.

Из уравнения Бернулли (10.9) для горизонтальной трубки тока и уравнения неразрывности (10.2) следует, что при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах, т.е. там, где скорость меньше.

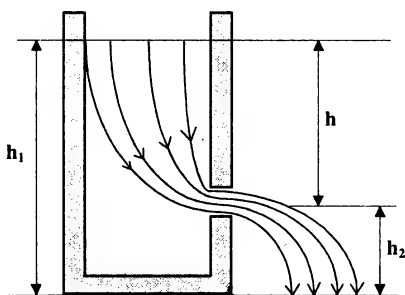


Рис. 10.4

Уравнение Бернулли используется для нахождения скорости истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда. Рассмотрим цилиндрический сосуд с жидкостью, в боковой стенке которого на некоторой глубине ниже уровня жидкости имеется маленькое отверстие (рис. 10.4).

Рассмотрим два сечения (на уровне h_1 свободной поверхности жидкости в сосуде и на уровне h_2 выхода ее из отверстия).

Напишем для них уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2.$$

Так как давления p_1 и p_2 в жидкости на уровнях первого и второго сечений равны атмосферному, т. е. $p_1 = p_2$, то уравнение будет иметь вид

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{v_2^2}{2} + gh_2.$$

Из уравнения неразрывности (10.2) следует, что $v_2/v_1 = S_1/S_2$, где S_1 и S_2 - площади поперечных сечений сосуда и отверстия. Если $S_1 \gg S_2$, то членом $v_1^2/2$ можно пренебречь и тогда

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh,$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Это выражение получило название **формулы Торричелли** (по имени итальянского физика и математика Э. Торричелли, 1608 - 1647).

10.4. Вязкость (внутреннее трение).

Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей

Вязкость (внутреннее трение) - это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

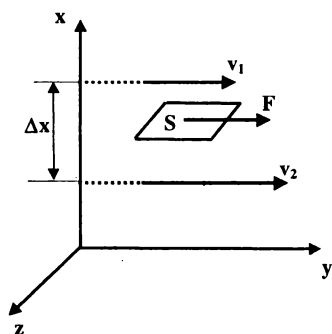


Рис. 10.5

Сила внутреннего трения $\vec{F}$ тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхности слоя S (рис. 10.5), и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою. На рисунке представлены два слоя, отстоящие друг от друга на расстояние Δx и движущиеся со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. При этом $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \Delta \vec{v}$. Направление, в котором отсчитывается расстояние между слоями, перпендикулярно скорости

течения слоев. Величина $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ показывает, как быстро

меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении x , перпендикулярном направлению движения слоев, и называется **градиентом скорости**.

Таким образом, модуль силы внутреннего трения

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S, \quad (10.10)$$

где коэффициент пропорциональности η , зависящий от природы жидкости, называется **динамической вязкостью** (или просто вязкостью).

Единица вязкости - паскаль-секунда (Па·с): 1 Па·с равен динамической вязкости среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости с модулем, равным 1 м/с на 1 м, возникает сила внутреннего трения в 1 Н на 1 м² поверхности касания слоев (1 Па·с = 1 Н·с/м²).

Чем больше вязкость, тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем большие силы внутреннего трения в ней возникают. Вязкость зависит от температуры, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен (для жидкостей η с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот, увеличивается), что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения.

Особенно сильно от температуры зависит вязкость масел. Например, вязкость касторового масла в интервале 18 - 40°C падает в четыре раза. Советский физик П. Л. Капица (1894-1984; Нобелевская премия 1978 г.) открыл, что при температуре 2,17° К жидкий гелий переходит в сверхтекучее состояние, в котором его вязкость равна нулю.

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется **ламинарным (слоистым)**, если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних слоев, не перемешиваясь с ними, и **турбулентным (вихревым)**, если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижным. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы.

При турбулентном течении частицы жидкости приобретают составляющие скоростей, перпендикулярные течению, поэтому они могут переходить из одного слоя в другой. Скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Так как частицы жидкости переходят из одного слоя в другой, то их скорости в различных слоях мало отличаются. Из-за большого градиента скоростей у поверхности трубы обычно происходит образование вихрей.

Английский ученый О. Рейнольдс (1842-1912) в 1883 г. установил, что характер течения зависит от безразмерной величины, называемой **числом Рейнольдса**:

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\eta} = \frac{\langle v \rangle d}{\nu},$$

где $\nu = \eta/\rho$ - **кинематическая вязкость**; ρ - плотность жидкости; $\langle v \rangle$ - средняя по сечению трубы скорость жидкости; d - характерный линейный размер, например диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ($Re < 1000$) наблюдается ламинарное течение, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в области $1000 < Re < 2000$, а при $Re = 2300$ (для гладких труб) течение - турбулентное. Если число Рейнольдса одинаково, то режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

10.5. Движение тел в жидкостях и газах

Одной из важнейших задач аэро- и гидродинамики является исследование движения твердых тел в газе и жидкости, в частности изучение тех сил, с которыми среда действует на движущее тело. Эта проблема приобрела большое значение в связи с развитием авиации и увеличением скорости движения морских судов.

На тело, движущееся в жидкости или газе, действуют две силы (равнодействующую их обозначим $\vec{R}$), одна из которых ($\vec{R}_x$) направлена в

сторону, противоположную движению тела (в сторону потока), - **лобовое сопротивление**, а вторая (R_y) перпендикулярна этому направлению - **подъемная сила** (рис. 10.6).

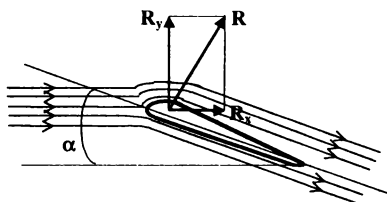


Рис. 10.6

сила (рис. 10.6).

Если тело симметрично и его ось симметрии совпадает с направлением скорости, то на него действует только лобовое сопротивление, подъемная же сила в этом случае равна нулю. Можно доказать, что в *идеальной жидкости* равномерное движение происходит без лобового сопротивления.

Иначе обстоит дело при движении тел в вязкой жидкости (особенно при увеличении скорости обтекания). Вследствие вязкости среды в области, прилегающей к поверхности тела, образуется пограничный слой частиц, движущихся с меньшими скоростями. В результате тормозящего действия этого слоя возникает вращение частиц и движение жидкости в пограничном слое становится вихревым. Если тело не имеет обтекаемой формы (нет плавно утончающейся хвостовой части), то пограничный слой жидкости отрывается от поверхности тела. За телом возникает течение жидкости (газа), направленное противоположно набегающему потоку. Оторвавшийся пограничный слой, следуя за этим течением, образует вихри, вращающиеся в противоположные стороны.

Лобовое сопротивление зависит от формы тела и его положения относительно потока, что учитывается безразмерным коэффициентом сопротивления C_x , определяемым экспериментально:

$$R_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (10.11)$$

где ρ - плотность среды; v - скорость движения тела; S - наибольшее поперечное сечение тела.

Составляющую R_x можно значительно уменьшить, подобрав тело такой формы, которая не способствует образованию завихрения.

Подъемная сила может быть определена формулой, аналогичной (10.11):

$$R_y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S,$$

где C_y - безразмерный коэффициент подъемной силы.

Для крыла самолета требуется большая подъемная сила при малом лобовом сопротивлении (это условие выполняется при малых **углах атаки** α (угол к потоку) (см. рис. 10.5). Крыло тем лучше удовлетворяет этому условию, чем больше величина $K = C_y/C_x$, называемая **качеством крыла**. Большие заслуги в конструировании требуемого профиля крыла и изучения влияния геометрической формы тела на коэффициент подъемной силы принадлежат Н. Е. Жуковскому (1847 - 1921).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. *Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.*

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

Пример выполнения задания тренинга на умение 1

Задание

С высоты $h_{01} = 10\text{ м}$ над землей без начальной скорости начинает падать камень. Одновременно с высоты $h_{02} = 5\text{ м}$ вертикально вверх бросают другой камень. С какой начальной скоростью v_0 брошен второй камень, если известно, что камни встретились на высоте $h = 1\text{ м}$ над землей?

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№	Алгоритм	Конкретное соответствие условия задания предложенному алгоритму
1.	Выбрать тело отсчета и связать с ним ось координат.	Ось координат направим вверх и примем за начало отсчета землю.
2.	Записать уравнение движения материальной точки.	$h_1 = h_{01} - gt^2/2$ - уравнение движения первого тела; $h_2 = h_{02} + v_0t - gt^2/2$ - уравнение движения второго тела. В момент встречи $h_1 = h_2 = h$.
3.	Найти неизвестные кинематические характеристики материальной точки.	Тогда, решая эти уравнения, получим $v_0 = (h_{01} - h_{02})\sqrt{g/2(h - h_{01})} \cong 3,69\text{ м/с}$.

Выполните самостоятельно следующие задания:

✓1. Два поезда прошли одинаковый путь s за одно и то же время t , однако один поезд, трогаясь с места, прошел весь путь равноускоренно с ускорением $a = 0,03\text{ м/с}^2$, а другой поезд половину пути шел со скоростью $v_1 = 5\text{ м/с}$, а другую половину пути со скоростью $v_2 = 15\text{ м/с}$. Найти путь s , пройденный каждым поездом.

✓2. Тело брошено вертикально вверх с некоторой высоты с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с. Определить координату h , скорость v тела через время $t = 10$ с и пройденный за это время путь s ($g = 10$ м/с²).

✓3. По наклонной плоскости, длина которой $L = 2,5$ м, одновременно стали двигаться два тела: одно - вверх с начальной скоростью $v_0 = 0,5$ м/с, другое - вниз без начальной скорости. Через какое время t тела встретятся и какой будет их относительная скорость в месте встречи?

Пример выполнения задания тренинга на умение 2 ✓

Задание

Поезд въезжает на закругленный участок пути с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с и проходит путь $s = 600$ м за время $t = 30$ с. Радиус закругления равен $R = 1$ км. Определить скорость v и полное ускорение a поезда в конце этого пути.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№	Алгоритм	Конкретное соответствие условия задания предложенному алгоритму
1.	Записать уравнение движения материальной точки.	Уравнение движения $s = v_0 t + a_t t^2 / 2$, где a_t - тангенциальное ускорение. Зависимость скорости от времени $v = v_0 + a_t t$.
2.	Рассчитать ускорение (a) и скорость (v) материальной точки при криволинейном движении.	Вычислим тангенциальное ускорение $a_t = 2(s - v_0 t) / t^2 = 0,33$ м/с ² и скорость $v = 2(s - v_0 t) / t = 25$ м/с. Полное ускорение $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$, где $a_n = v^2 / R$ - центростремительное ускорение. $a_n = (25)^2 / 1000 = 0,625$ м/с ² . Тогда $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = 0,708$ м/с ² .

Выполните самостоятельно следующие задания:

✓1. Материальная точка движется по окружности радиуса $R = 0,2$ м равноускоренно с тангенциальным ускорением $a_t = 5$ м/с². Через какое время t после начала движения центростремительное ускорение будет равно $a_n = 2a_t$.

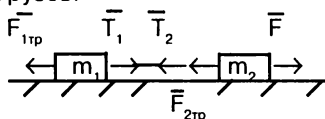
✓2. Найти линейную скорость v и центростремительное ускорение a_n точек на поверхности земного шара: а) на экваторе, б) на широте $\varphi=60^\circ$. Средний радиус земного шара $R=6400$ км.

✓3. При вращении тела по окружности угол между полным ускорением a и линейной скоростью v равен $\alpha=30^\circ$. Каково численное значение отношения a_n/a_t ?

Пример выполнения задания тренинга на умение 3 ✓

Задание

Два тела, массы которых $m_1=3$ кг и $m_2=2$ кг, лежащие на горизонтальном столе, соединены невесомой нитью параллельно плоскости стола. На второе тело в горизонтальном направлении действует сила $F=20$ Н. Коэффициент трения равен $\mu=0,2$; ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с². Определить ускорение системы грузов.



Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№	Алгоритм	Конкретное соответствие условия задания предложенному алгоритму
1.	Выполнить рисунок и указать направление сил, действующих на тела.	На первое тело в горизонтальном направлении действуют силы $F_{1тр}$ и T_1 . Силы, действующие по вертикали, не оказывают влияния на движение, и на рисунке не указаны. На второе тело действуют силы $F_{2тр}$, T_2 и F .
2.	Записать уравнение движения для каждого из тел.	Запишем уравнение движения первого и второго тел : $T_1 - F_{1тр} = m_1 a$ и $F - T_2 - F_{2тр} = m_2 a$. Так как нить невесома, то $T_1 = T_2 = T$. Сила трения определяется как $F_{тр} = \mu mg$.
3.	Вычислить неизвестные параметры.	Решая совместно уравнения, получим выражение для ускорения: $a = [F - \mu g(m_1 + m_2)] / (m_1 + m_2) = [20 - 0,2 \cdot 10(3+2)] / (3+2) = 2$ м/с ² .

Выполните самостоятельно следующие задания:

1. Две гири массами $m_1=3$ кг и $m_2=6,8$ кг висят на концах нити, перекинутой через неподвижный блок. Легкая гиря находится на 2 м ниже тяжелой. Гири пришли в движение без начальной скорости. Через какое время t они окажутся на одной высоте.

2. На тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости, установлен стержень с подвешенным на нити шариком. Найти натяжение нити T , если шарик имеет массу $m = 2$ г. Плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 60^\circ$.

3. Автомобиль массой $m = 3$ т разгоняется из состояния покоя по горизонтальному пути в течение $t = 10$ с под действием силы тяги $F = 3000$ Н, после чего до остановки движется с выключенным двигателем. Определить: 1) с каким ускорением движется автомобиль при разгоне; 2) какой скорости он достигнет во время разгона.

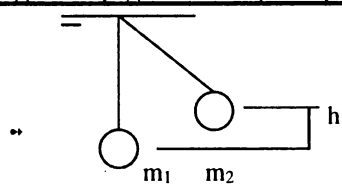
Пример выполнения задания тренинга на умение 4 ✓

Задание

Пуля массой $m_1 = 10$ г, летевшая горизонтально попадает в подвешенный на нити шар массой $m_2 = 2$ кг, и пробив его, вылетает со скоростью $v_1 = 400$ м/с, причем шар поднимается на высоту $h = 0,2$ м. Определить: с какой скоростью v летела пуля. $g \approx 10$ м/с².

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№	Алгоритм	Конкретное соответствие условия задания предложенному алгоритму
1.	Выполнить рисунок с указанием начального и конечного положения тела.	
2.	Записать законы сохранения импульса и энергии.	Запишем закон сохранения импульса и энергии: $m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2 ;$ $\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 g h .$ $v_2 = \sqrt{2gh}$. Учитывая значение скорости v_2 получим выражение для $v = (m_1 v_1 + m_2 \sqrt{2gh}) / m_1$
3.	Произвести расчет неизвестных величин.	$v = (0,01 \cdot 400 + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,2}) / 0,01 = 800 \text{ м/с} .$

Выполните самостоятельно следующие задания:

1. Человек, стоящий на коньках на гладком льду, бросает камень массой $m = 0,5$ кг. Спустя время $t = 2$ с камень достигает берега, пройдя расстояние $s = 20$ м. С какой скоростью начинает скользить конькобежец, если его масса $M = 60$ кг?. Трение коньков и камня о лед не учитывать.

2. В тело массой $m_1=990$ г, лежащее на горизонтальной поверхности, попадает пуля массой $m_2=10$ г и застревает в нем. Скорость пули направлена горизонтально и равна $v=700$ м/с. Какой путь s пройдет тело до остановки, если коэффициент трения между телом и поверхностью $\mu=0,05$.

3. Свинцовый шар массой $m_1=500$ г, движущейся со скоростью $v_1=0,1$ м/с, сталкивается с неподвижным шаром из воска массой $m_2=200$ г, после чего оба шара движутся вместе. Определить кинетическую энергию шаров после удара.

Пример выполнения задания тренинга на умение 5 ✓

Задание

Автомобиль массой 1500 кг начинает разгоняться из состояния покоя по горизонтальному пути с ускорением $a=1 \text{ м/с}^2$. Коэффициент сопротивления движению $\mu=0,02$. Определить работу, совершенную за первые $t=10 \text{ с}$ движения; среднюю мощность, развиваемую за этот промежуток времени; мгновенную мощность, развиваемую в конце 10-й секунды.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№	Алгоритм	Конкретное соответствие условия задания предложенному алгоритму
1.	Рассчитать механическую работу (A).	На автомобиль при разгоне действуют силы: $F_T - F_{тр} = ma$; $F_{тр} = \mu mg \Rightarrow F_T = m(a + \mu g)$ Найдем работу: $A = F_T S$; $S = (1/2)at^2 \Rightarrow$ $A = m(a + \mu g)(1/2)at^2 =$ $= 1500(1 + 0,02 \cdot 9,81)(1/2) \cdot 1 \cdot 10^2 \approx 90 \text{ КДж.}$
2.	Рассчитать мощность (N).	Вычислим среднюю мощность: $N = A/t =$ $= 90 \cdot 10^3 / 10 = 9 \text{ кВт.}$ Вычислим мгновенную мощность: $N_t = F_T v = F_T at = m(a + \mu g)at = 1500(1 + 0,02 \cdot 9,81) \cdot 1 \cdot 10 \approx 18 \text{ кВт}$

Выполните самостоятельно следующие задания:

1. Какую работу совершил мальчик, стоящий на гладком льду, сообщив санкам начальную скорость $v=4 \text{ м/с}$ относительно льда, если масса санок $m=4 \text{ кг}$, а масса мальчика $M=20 \text{ кг}$? Трением о лед полозьев санок и ног мальчика можно пренебречь.

2. Найдите среднюю мощность N , развиваемую пороховыми газами при выстреле из винтовки, если длина канала ствола $l=1$ м, масса пули $m=10$ г, а скорость пули при вылете $v=400$ м/с. Массой газов, сопротивлением движению пули и отдачей винтовки можно пренебречь.

3. Моторы электровоза при движении со скоростью $v=72$ км/ч потребляют мощность $N=800$ кВт. Коэффициент полезного действия силовой установки электровоза $\eta=0,8$. Определить силу F тяги моторов.

Пример выполнения задания тренинга на умение 6

Задание

На поверхность цилиндра радиусом $R=0,5$ м действует постоянная касательная сила $F=100$ Н. При вращении цилиндра на него действует момент сил $M=4$ Нм. Определить массу цилиндра, если его угловое ускорение постоянно и равно $\epsilon=10$ рад/с².

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№	Алгоритм	Конкретное соответствие условия задания предложенному алгоритму
1.	Записать уравнение движения для вращающегося тела.	Уравнение вращательного движения цилиндра имеет вид $M=F \cdot r + I \cdot \epsilon$; момент инерции цилиндра равен $I=m \cdot r^2/2$, тогда $M=F \cdot r + (m \cdot r^2/2) \cdot \epsilon$. Найдем выражение для массы: $m=2(M-F \cdot r)/r^2 \cdot \epsilon$.
2.	Рассчитать неизвестные параметры.	$m=2(4-100 \cdot 0,5)/0,25 \cdot 10=36,8$ кг.

Выполните самостоятельно следующие задания:

1. Радиус первого шара в 4 раза больше радиуса второго, а масса второго шара в два раза больше массы первого. Шары вращаются с одинаковым угловым ускорением вокруг осей, проходящих через их центры. Как соотносятся моменты сил, действующие на эти шары?

2. На краю горизонтальной платформы, способной вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, стоит человек. Масса человека $m=60$ кг, масса платформы $M=200$ кг. С какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль края платформы со скоростью $v=1$ м/с? Платформу можно считать круглым однородным диском.

3. Катушка с медной проволокой массой 100 г лежит на столе. Когда потянули за проволоку с силой $F=1$ Н, направленной по углом $\alpha=60^\circ$ к поверхности стола, катушка стала вращаться и передвигаться по поверхности стола. Момент инерции катушки $I=2 \cdot 10^{-4}$ кг·м². Внешний радиус катушки $R=0,05$ м, внутренний - $r=0,02$ м. Определить ускорение, с которым двигалась катушка.

Пример выполнения задания тренинга на умение 7

Задание

Ракета движется относительно неподвижного наблюдателя со скоростью $v=0,99c$. Какое время пройдет по часам неподвижного наблюдателя, если по часам, движущимся вместе с ракетой, прошел $t_0 = 1$ год? Как изменятся линейные размеры тел в ракете для неподвижного наблюдателя? Как изменится для этого наблюдателя плотность вещества в ракете?

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№	Алгоритм	Конкретное соответствие условия задания предложенному алгоритму
1.	Записать выражения для промежутков времени, длины, массы и других величин в релятивистской механике.	Время по часам наблюдателя: $t = t_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$ Длина относительно земного наблюдателя : $l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$ Плотность вещества в ракете относительно наблюдателя будет определяться по формуле $\rho = m/V$. Так как $m = m_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, то $\rho = m_0 / (\sqrt{1 - v^2/c^2} S l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2})$ $\rho = \rho_0 / (1 - v^2/c^2).$
2.	Произвести расчет неизвестных величин относительно подвижной или неподвижной системы отсчета.	$t = 1 \text{ год} / \sqrt{1 - 0,99^2 c^2/c^2} \cong 7,1 \text{ года};$ $l = l_0 \sqrt{1 - 0,99^2 c^2/c^2} \cong 0,14 l_0;$ $\rho = \rho_0 / (1 - 0,99^2 c^2/c^2) \cong 50,2 \rho_0.$

Выполните самостоятельно следующие задания:

1. Две ракеты движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = v_2 = 3/4c$ относительно неподвижного наблюдателя. Определить скорость сближения ракет.

2. Мю-мезон, рождающийся в верхних слоях атмосферы, пролетает до распада 5 км. Определить с какой скоростью летит мю-мезон, если его собственное время жизни $t_0 = 2,21 \cdot 10^{-6}$ с.

3. Масса движущегося электрона в 11 раз больше его массы покоя. Определить кинетическую энергию электрона; его импульс.

ФИЗИКА

ЮНИТА 1

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Редактор Л.С. Лебедева
Оператор компьютерной верстки И.Ю. Маслова

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998

Сдано в печать 10.12.2001 г.

НОУ "Современный Гуманитарный Институт"

Тираж 4000.

Заказ 4432.

Современный Гуманитарный Университет

Отпечатано в Коломенской типографии. 140400, Московская обл., г. Коломна, ул. III Интернационала, д. 2 а.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

2

1

1

• •

•

•